Corso SIA-FAC sul tema:
"La stima del Non-Life Underwriting Risk per Solvency II"

Milano, 21 Novembre 2017

prof. Nino Savelli
Ordinario di Teoria del Rischio
Email: nino.savelli@unicatt.it

prof. Diego Zappa
Associato di Statistica Assicurativa
Email: diego.zappa@unicatt.it

dott. Gian Paolo Clemente
Ricercatore, Docente di Tecnica Attuariale delle Assicurazioni Danni
Email: gianpaolo.clemente@unicatt.it

DE ANGELIS SAVELLI & ASSOCIATI
www.deangelis-savelli.it

Agenda (1/2)

Parte I: Solvency II e la Standard Formula per il Non-Life Underwriting Risk

- ✓ Gli studi di impatto quantitativo (EIOPA)
- ✓ Approccio a tre Pilastri (Dir. 2009/138/CE)
- ✓ La struttura della Standard Formula
- ✓ La Standard Formula per il Non-Life UW Risk: i moduli previsti
- ✓ Premium e Reserve Risk (Atti Delegati)
- ✓ Un Case Study per il Premium e Reserve Risk

Parte II: Metodologie di valutazione per il Premium Risk

- ✓ Scomposizione del Risultato Tecnico: Premium e Reserve Risk
- ✓ Il Premium Risk mediante il Collective Risk Model
- ✓ La distribuzione del numero dei sinistri: Poisson semplice e Poisson Misturata
- ✓ La distribuzione del claim size
- ✓ I momenti e la distribuzione del Costo Aggregato dei sinistri
- ✓ La stima del Premium Risk mediante un Collective Risk Model
- ✓ I risultati del modello simulativo per il premium risk

Agenda (2/2)

Parte III: Metodologie di valutazione per il Reserve Risk

- ✓ Market Consistent Valuation delle passività
- ✓ Modelli stocastici per la valutazione della riserva sinistri
- ✓ Metodi a totale Run-Off: la valutazione del “Prediction Error”
- ✓ Un approccio One-Year: la formula di Merz e Wuthrich

Parte IV: Undertaking Specific Parameter

- ✓ Le distribuzioni empiriche dei principali indicatori tecnici: dati mercato Italia - ramo R.C. Auto
- ✓ Undertaking Specific Approach: le fonti normative
- ✓ Metodi standardizzati per il Premium e Reserve Risk
- ✓ Data Requirements

Appendici

Parte I.

SOLVENCY II E LA STANDARD FORMULA PER IL NON-LIFE UNDERWRITING RISK

Gli studi di impatto quantitativo (EIOPA)

Gli Studi di Impatto Quantitativo

- Allo scopo di procedere alla stesura delle regole di dettaglio (*Implementing Measures*, misure di II livello del progetto *Lamfalussy*), una serie di **studi di impatto quantitativo (QIS)** sono stati proposti negli anni al mercato.

QIS1	**Svolto nel 2005 con la finalità di valutare gli effetti di differenti valutazioni di Attività e Passività**
QIS2	**Svolto nel 2006 contenente nuove metodologie di valutazione per attività e passività e per il calcolo del requisito di capitale (SCR) e la quantificazione degli own funds**
QIS3	**Svolto nel 2007 che ha rivisto alcune metodologie proposte nel QIS2 e ha introdotto la determinazione del SCR anche per i Gruppi**
QIS4	**Svolto nel 2008 riguardante sia *Solo Entities sia i Gruppi***
QIS5	**Svolto nel periodo Agosto-Novembre del 2010 riguardante sia Solo Entities sia i Gruppi e contenente metodologie di valutazione (Attivi/Passivi/SCR/MCR e OF) particolarmente dettagliate e una maggiore attenzione alla calibrazione dei parametri**

LTGA, Stress Test & Delegated Acts

LTGA

In data **14 giugno 2013** l'EIOPA ha pubblicato il report finale contenente i risultati del **LTGA**, lo studio di impatto sulle misure volte a contrastare la volatilità per i prodotti assicurativi di lungo periodo (pubblicato nel **Gennaio 2013**).
In particolare, è stato testato un pacchetto di misure (criteri per la estrapolazione, Counter Cyclical Premium, Matching Adjustment, misure transitorie) in grado di assicurare un trattamento di vigilanza appropriato ai prodotti assicurativi di lungo termine in presenza di condizioni dei mercati finanziari di estrema ed eccezionale volatilità.
Inoltre alcuni parametri market-wide ed alcune soluzioni sono state riviste rispetto al precedente QIS.

Stress Test 2014

Stress Test con riferimento al 31.12.2013, lanciato ad **Aprile 2014** e con risultati **attesi per Novembre 2014**. Prevedeva differenti stress con focus sul market risk e su alcuni insurance factors (sia life che non-life).

Atti delegati

La Commissione europea ha adottato gli Atti Delegati e sono stati pubblicati nella Gazzetta Ufficiale dell' UE il 17 Gennaio del 2015 (Commission Delegated Regulation n.2015/35)

Stress Test 2016

In data **14 Marzo 2016** l'EIOPA ha pubblicato un invito di collaborazione destinato alle Imprese di Assicurazione UE in merito allo svolgimento di un nuovo **Stress Test** con riferimento al 31.12.2015, da svolgersi nel periodo Giugno-Luglio 2016.

⇨ **1° Gennaio 2016: entrano in vigore gli atti delegati Solvency II**

Approccio a tre Pilastri
(Dir. 2009/138/CE)

Struttura a tre Pilastri
Direttiva Solvency II (Dir. 2009/138/CE)

Solvency II

Pillar I	Pillar II	Pillar III
Quantitative requirements	**Supervisor Review**	**Disclosure requirements**

Pillar I – Quantitative requirements

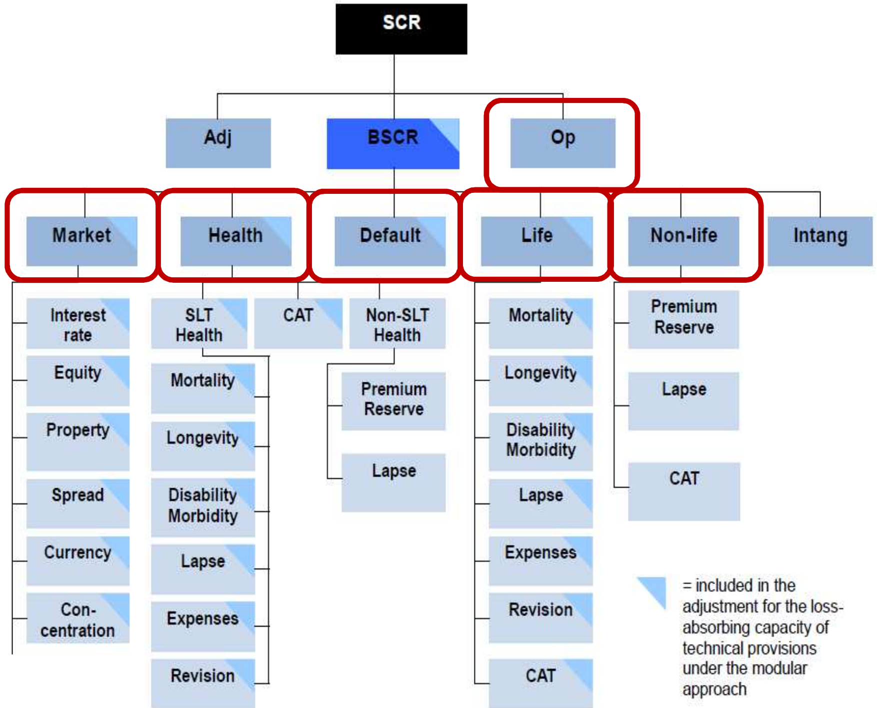
- Appropriate **Riserve Tecniche**;
- Idonee attività a copertura;
- **Ammontare minimo di capitale** per ogni assicuratore (sulla base del complesso insieme dei rischi – *"full range of risks"* – che hanno impatto sulla situazione finanziaria dell'impresa).

Pillar II – Supervisor Review

- Appropriata struttura di **Risk Management**;
- **Internal Models**;
- Attività di controllo e poteri di intervento dell' **Autorità di Vigilanza**.

Pillar III – Disclosure requirements

- **Report Solvency II**;
- Informazioni **qualitative** (attività di controllo e gestione del rischio);
- Informazioni **quantitative** (livelli di capitale e di copertura).



SCR

Livello di Confidenza = 99.5%
Misura di Rischio = VaR (Value-at-Risk)
Orizzonte Temporale = 1 anno

*Il **rating S&P** associato al livello 99.5% **è BBB-***

SCR – Standard Formula
Principali caratteristiche

Calcolo basato su architettura modulare (moduli e sottomoduli)

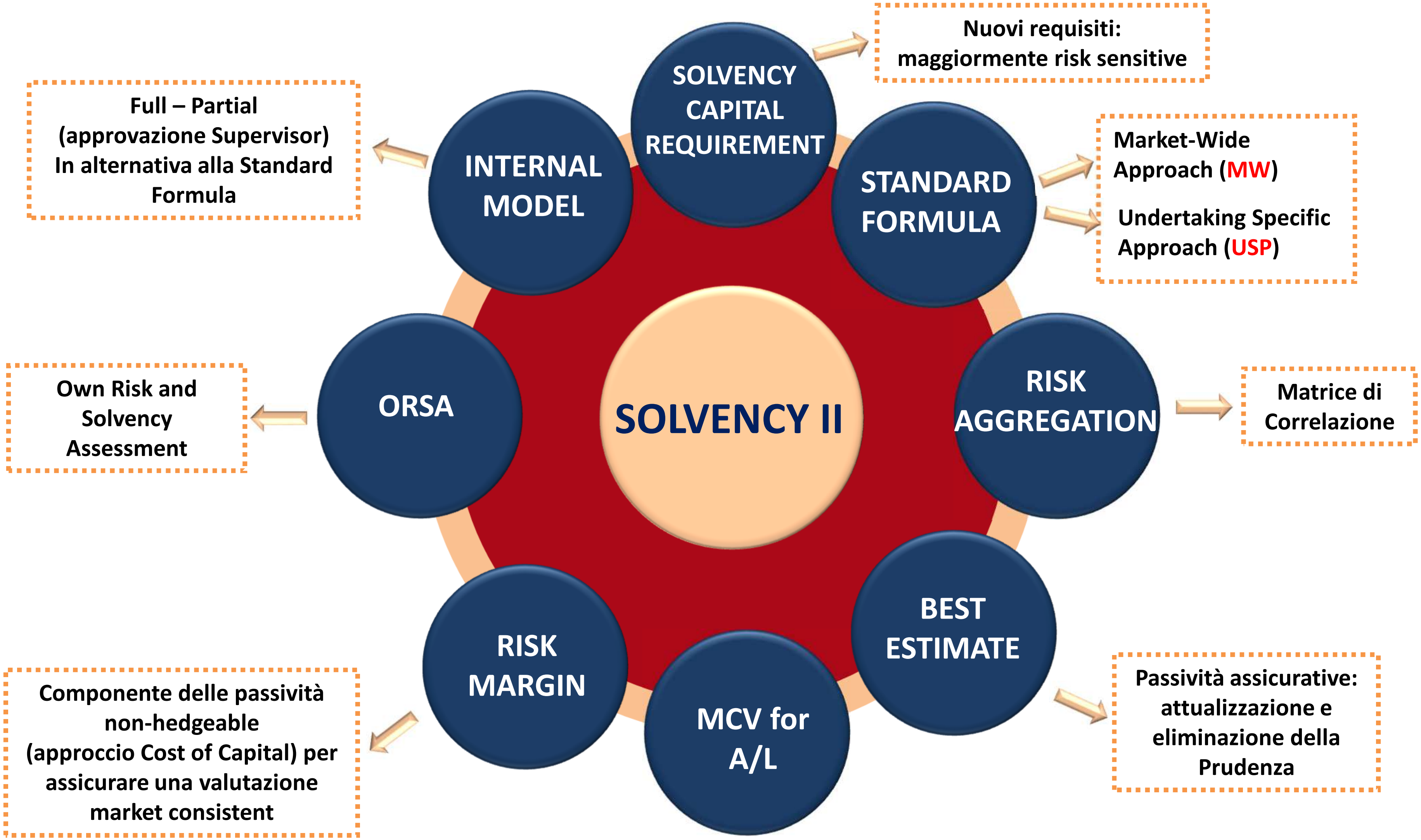
Aggregazione dei moduli e dei sotto-moduli mediante correlazione lineare **(coefficienti prefissati)**

Compresi almeno i seguenti rischi (art. 103 Direttiva):
- Non-life underwriting risk
- Life underwriting risk
- Health underwriting risk
- Market risk
- Counterparty default risk
- Operational risk

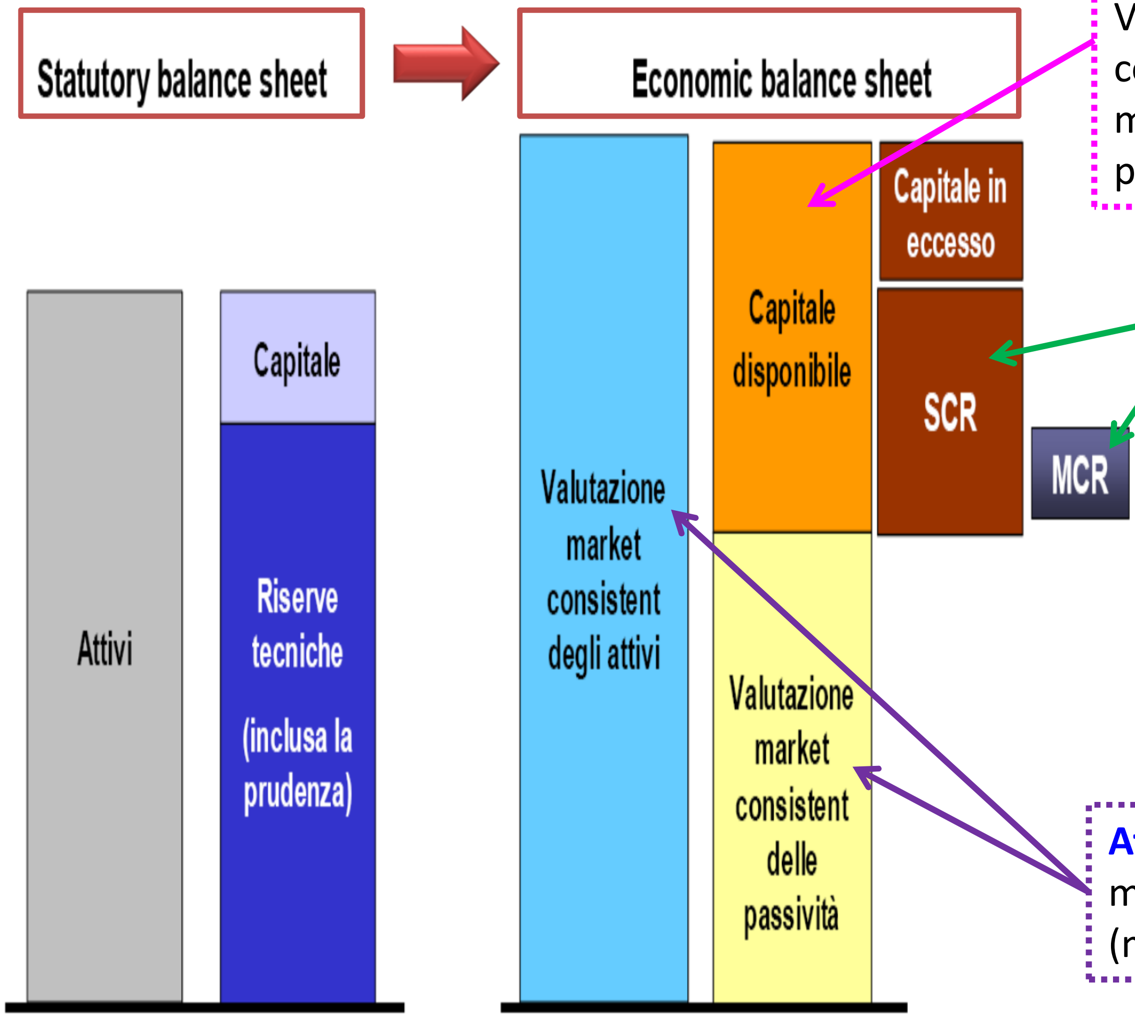
Per la valutazione dei sotto-moduli, viene fornita la **metodologia di calcolo** (*approccio per scenario* o *factor based formula*) con parametri\scenari prefissati o ricavabili da caratteristiche dell'impresa

Vengono forniti **approcci semplificati e/o proxy** per piccoli portafogli o imprese di piccole dimensioni

Solvency II keywords



Economic balance sheet



Valutare il **patrimonio disponibile** a copertura del capitale (Own Funds) mediante la classificazione in Tiers prevista da Solvency II.

Determinare due livelli di **capitale minimo** (Solvency Capital Requirement e Minimum Capital Requirement) mediante la standard formula (è prevista, nel secondo pilastro, la possibilità di valutare il capitale mediante internal models).

Attivi e passivi valutati secondo la metodologia definita da Solvency II (market consistent).

La struttura della Standard Formula

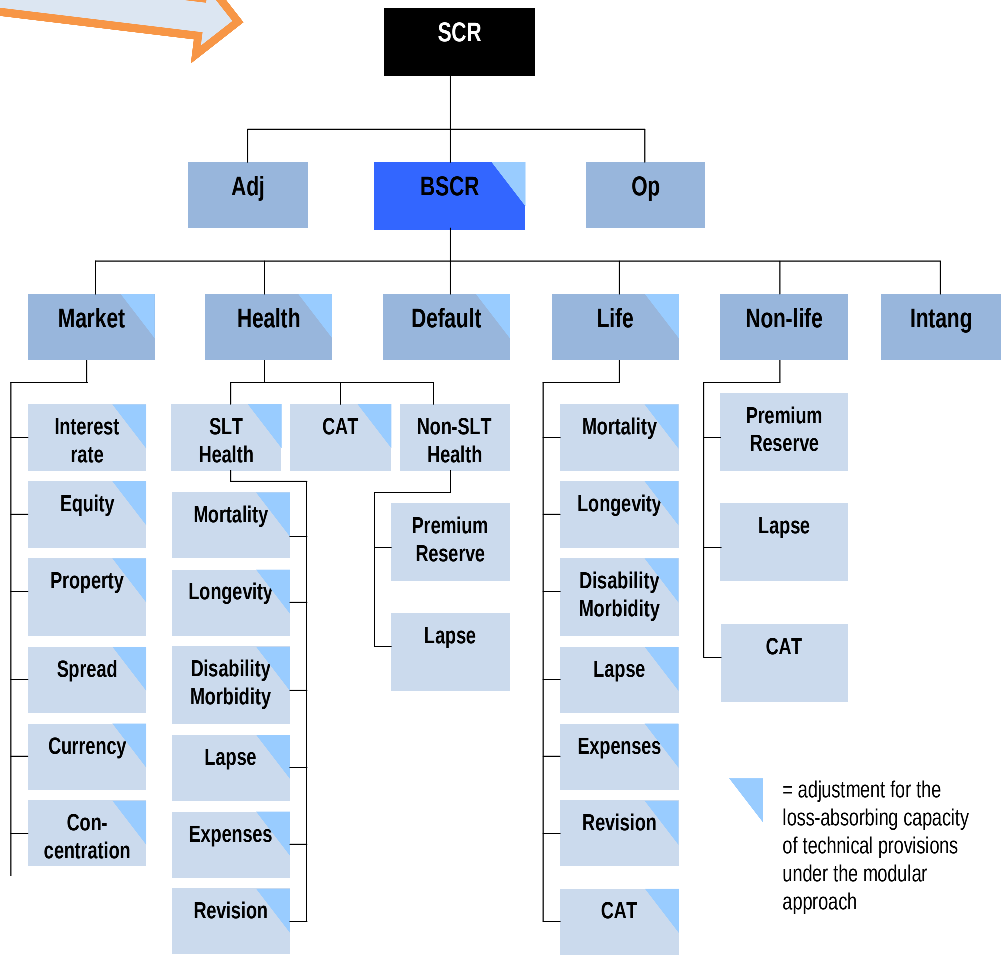
La struttura modulare

SCR=BSCR+SCRop-Adj

Aggregazione dei requisiti di capitale relativi ai 6 rischi principali tramite matrice di correlazione in modo da ottenere il BSCR.

Aggregazione, per ciascun modulo di rischio, dei requisiti di capitale relativi ai sub-moduli tramite matrici di correlazione.

Determinazione **del requisito di capitale per ogni sub-modulo** in cui sono suddivisi i rischi principali.
Il requisito viene calcolato, a seconda del rischio, con:
✓ *Scenario testing approach*
✓ *Factor-based formula*
calibrati per riprodurre un VaR al 99,5% su 1 anno.



Calcolo del SCR

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{op}$$

BSCR	Adj	SCR_{op}
Ottenuto dall'**aggregazione dei 6 macro-moduli** (Life, Non-Life, Health, Market, Default, Intangible Asset). Ogni macro modulo è a sua volta ottenuto dall'aggregazione dei sotto-moduli.	Aggiustamento per **capacità di assorbimento delle perdite** legato alle *imposte differite* (Adj_{DT}) e ai *future discretionary bonuses* (Adj_{TP}) previsti nelle polizze vita con rivalutazione.	Requisito di capitale per il **rischio operativo**.

Il processo di aggregazione del BSCR
(Basic Solvency Capital Requirement)

Il BSCR è ottenuto:

- aggregando le **5 sotto componenti** sulla base della *matrice di correlazione* fornita dal CEIOPS
- **sommando** la componente relativa **agli Intangibles** (*ipotesi di piena correlazione*).

i \ j	Market	Default	Life	Health	Non-life
Market	1				
Default	0.25	1			
Life	0.25	0.25	1		
Health	0.25	0.25	0.25	1	
Non-life	0.25	0.5	0	0	1

$$BasicSCR = \sqrt{\sum_{ij} Corr_{ij} \times SCR_i \times SCR_j} + SCR_{Intangibles}$$

Ad es. considerando **solo** SCR_{mkt} e SCR_{life}:

$$BSCR = \sqrt{SCR_{Life}^2 + SCR_{mkt}^2 + 2 \cdot 0{,}25 \cdot SCR_{life} \cdot SCR_{mkt}}$$

Approcci per la Formula Standard

Factor-Based Formula

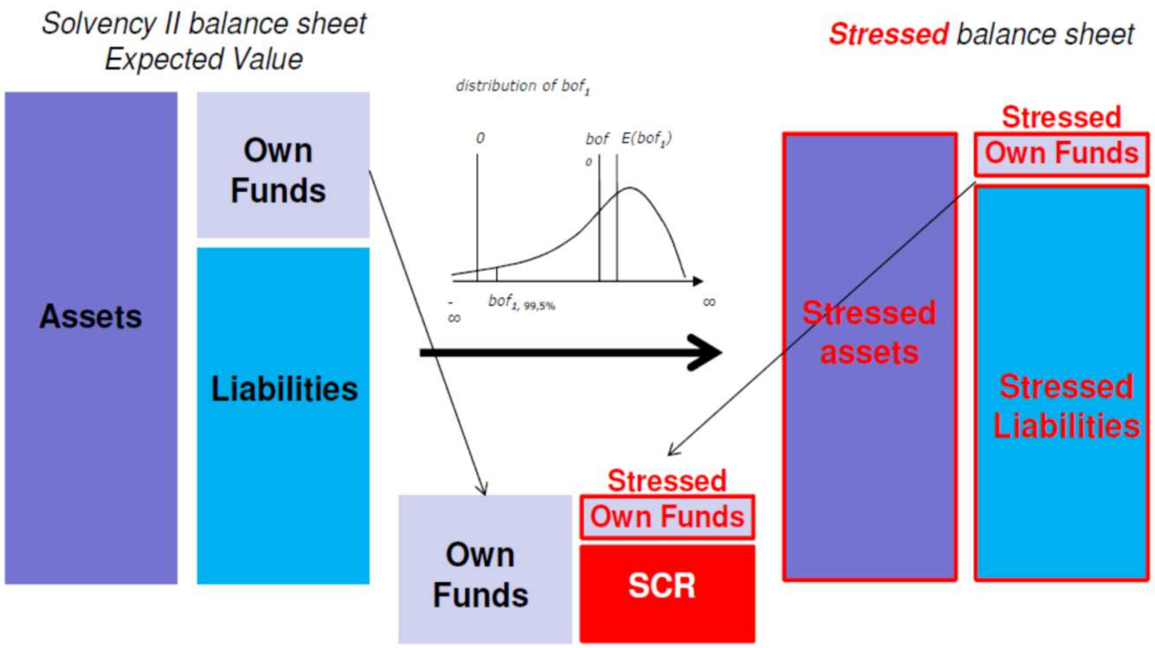
- **È basato sull'applicazione di uno o più fattori ad una misura dell'esposizione al rischio**;
- I fattori sono opportunamente calibrati per considerare la coda della distribuzione (*livello di confidenza e misura di rischio*). Nel fattore si considerano tutti gli elementi di rischiosità (*volatilità, trend, livello di rischiosità*);
- I fattori possono essere identici o differenziati in funzione di determinate caratteristiche;
- I moduli relativi a Premium e Reserve Risk per il Non-Life sono esempi di *Factor-Based Approach*.

Scenario Approach

- **È basato sull'impatto di scenari avversi sulla posizione finanziaria dell'impresa, definiti separatamente per ogni categoria di rischio**;
- Prevede il ricalcolo di attività e passività a seguito del verificarsi dello scenario avverso e la stima della perdita associata al verificarsi dello scenario;
- Si può basare su scenari predefiniti, su scenari specifici identificati dall'autorità nazionale o identificati dall'impresa in funzione delle proprie caratteristiche;
- I moduli relativi a UW-Risk del Life, al Cat Risk per il Non-Life, all'Interest Rate per il Market sono esempi di *Scenario Approach*.

Scenario Approach
(utilizzato per Life UW-Risk e Market Risk)

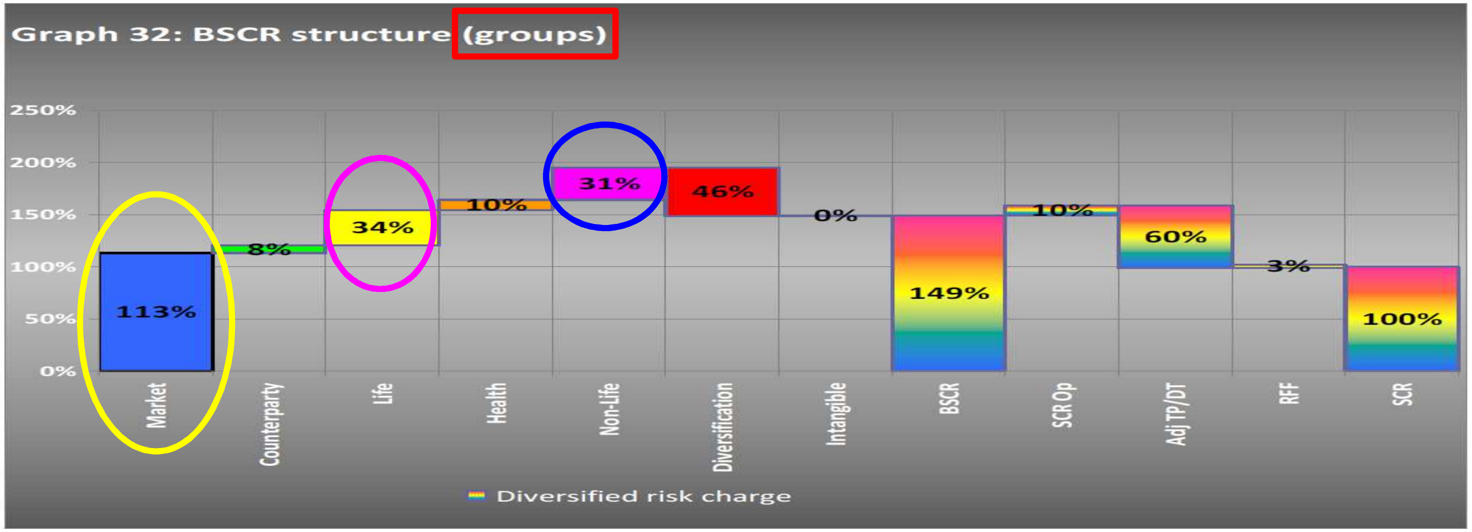
Normal | **Stressed**

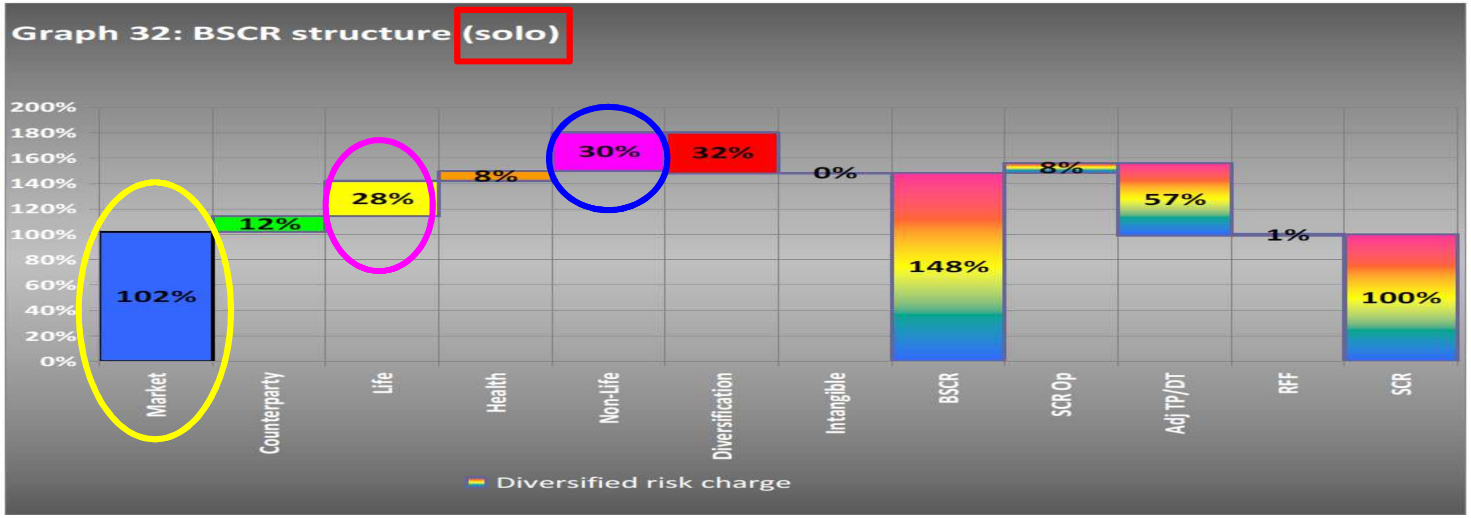


- **Normal:** Attivi e Passivi calcolati alla data di valutazione coerentemente con le metodologie di valutazione previste da Solvency II.
- **Stressed:** Attivi e Passivi ricalcolati a seguito del verificarsi di uno shock prefissato (lo shock è prefissato ed è calibrato in funzione di un VaR al 99,5% su un orizzonte temporale annuale).

Struttura del SCR
(QIS5 – anno 2010)

Fonte: Report QIS5 - EIOPA





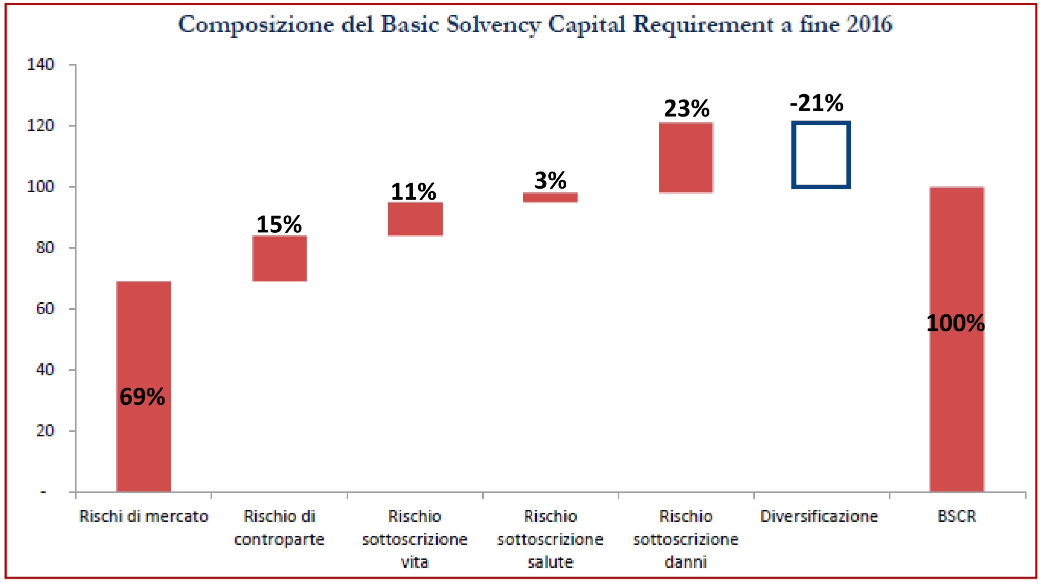
Composizione del BSCR per il Mercato italiano - 2016

- La tabella riporta il **SCR** ed il **MCR** delle Compagnie Italiane nel corso del 2016 che al 31 Dicembre sono, rispettivamente, pari 53,7 e 19,9 miliardi;
- Il grafico sulla destra illustra la **composizione** aggregata per l'intero mercato del **requisito patrimoniale di solvibilità** di solvibilità al 31 dicembre 2016, ripartita per fonte di rischio;
- Il **rischio di mercato è la principale fonte di rischio** del settore assicurativo, con un incidenza pari al 69%.

Andamento del Solvency Capital Requirement e del Minimum Capital Requirement

(milioni di euro)

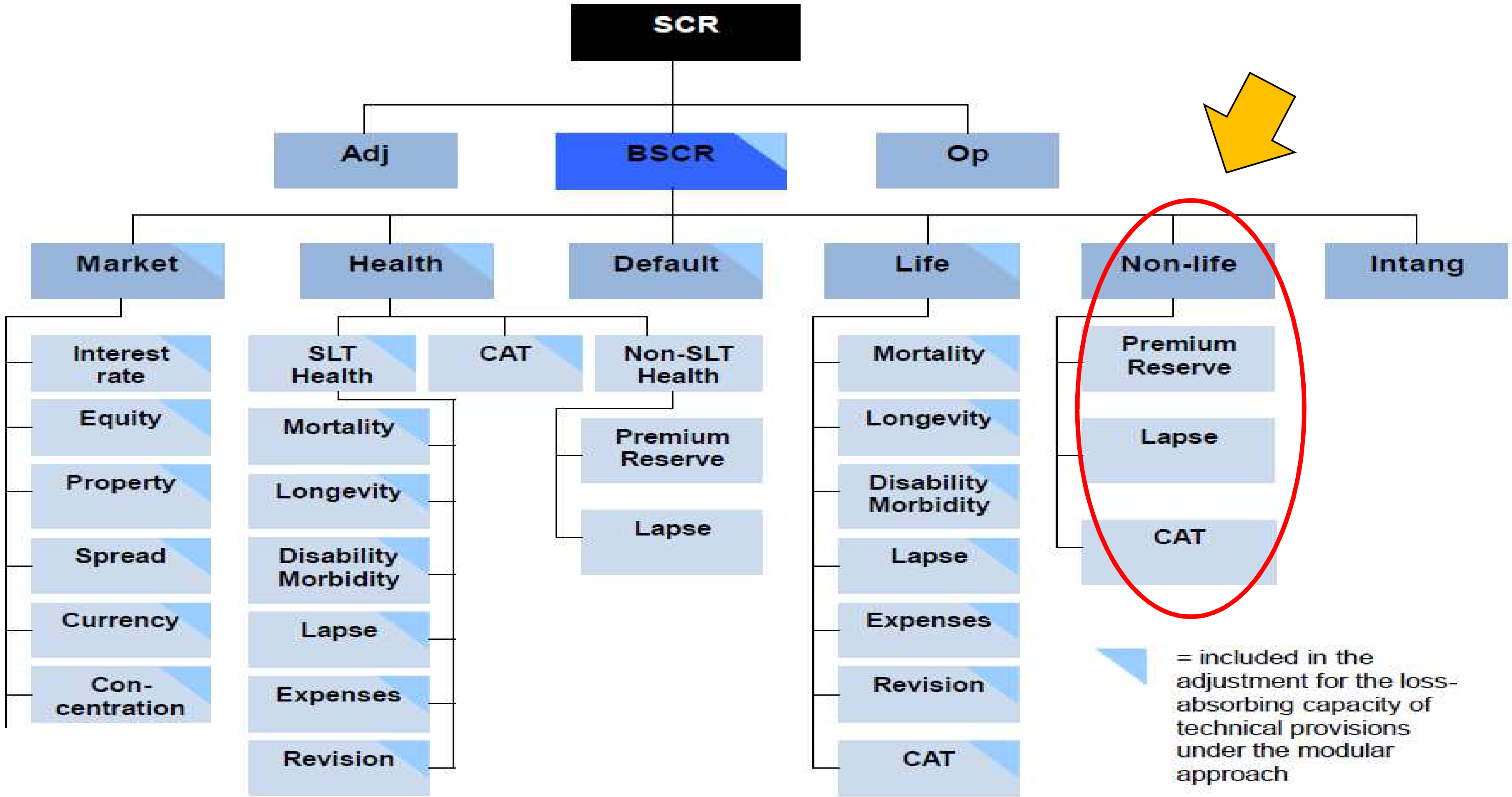
	01/01/2016	31/03/2016	30/06/2016	30/09/2016	31/12/2016
SCR	49.609	49.935	50.541	50.492	53.678
MCR	18.089	18.501	18.982	19.266	19.873



Fonte: Relazione Annuale IVASS, 23 Giugno 2017

La Standard Formula per il Non-Life UW Risk: i moduli previsti

La struttura modulare



I rischi considerati (1/2)

- Il modulo considera i seguenti rischi, raggruppati in tre sotto-moduli (*Premium e Reserve sono infatti considerati in un unico modulo dal QIS3*).

PREMIUM RISK: *representing the **risk to have unsufficient pricing** coming from the policies will be underwrited (renewals included) **in the following year and the risks of the existing business still in force**.*

In pratica è il rischio che i premi relativi ai nuovi contratti più la riserva premi iniziale siano insufficienti a coprire il costo sinistri e le spese di liquidazione generati da questi contratti.

*In this risk is implicitly included also the **Expense Risk**, linked to volatility of the expenses amount. **In TS of QIS5 it is specified that in some LoBs this risk can be rather significant.***

RESERVE RISK: *representing the **reserve risk** coming from volatility of claims payment either in timing and amount.*

Rappresenta il rischio che le riserve sinistri alla data di valutazione siano insufficienti a coprire i rischi dell'anno successivo.

I rischi considerati (2/2)

LAPSE RISK: *the risk coming from the policyholders options eventually included in non-life policies, as for instance the option to lapse the contract before the maturity.*

Il rischio è stato introdotto dal QIS5 e ha generalmente un impatto contenuto sul requisito.

CAT RISK: *representing the risk of losses or unfavourable variations in the insurance liabilities value coming from high volatility in assumptions for* ***pricing and reserving*** *due to* ***exceptional or extreme events***.

Tale rischio considera l'effetto sia dei nat cat sia dei man made cat.

Composizione Non-Life UW Risk

Fonte: Report QIS5 - EIOPA

La granularity del Non-Life

Numero del ramo	LoB	Ramo
1	Motor vehicle liability	R.C. Autoveicoli Terrestri
2	Motor, other classes	Corpi di Veicoli Terrestri
3	Marine, aviation, transport (MAT)	Rami associati a Veicoli Marittimi, Veicoli Aerei e ai Trasporti e Merci trasportate (MAT)
4	Fire and other property damage	Incendio ed elementi naturali, Altri danni a beni
5	Third-party liability	R.C. Generale
6	Credit and suretyship	Credito e Cauzione
7	Legal expenses	Tutela Giudiziaria
8	Assistance	Assistenza
9	Miscellaneous	Miscellanea (comprende Perdite pecuniarie di vario genere)
10	Non-proportional reinsurance – casualty	Riassicurazione non proporzionale – Responsabilità Civile
11	Non-proportional reinsurance – MAT	Riassicurazione non proporzionale – MAT
12	Non-proportional reinsurance – property	Riassicurazione non proporzionale – Danni alla Proprietà

- Viene utilizzata la stessa segmentazione utilizzata per il calcolo delle riserve.
- I rami Infortuni e Malattia (Short-Term) sono valutati nel modulo Health Underwriting Risk.
- **La granularity del modulo Health** prevede dal QIS5 i seguenti rami per il lavoro diretto e la riassicurazione proporzionale:
  - *Medical Expenses,*
  - *Income Protection*
  - *Workers Compensation*
  - *Non-Proportional Reinsurance Health*
- Per la valutazione del premium e del reserve risk, i trattati di riassicurazione attiva proporzionale devono essere considerati nel ramo a cui fanno riferimento insieme al lavoro diretto.
- I trattati di riassicurazione attiva non proporzionale devono essere ripartiti tra i rami 10,11 e 12.

Premium e Reserve Risk
(Atti Delegati)

Il calcolo di NL_{pr} per Premium e Reserve Risk

- Nei *Delegated Acts*, come anche nelle TS del LTGA, il requisito di capitale per il Premium e Reserve risk è così definito:

$$SCR_{nl\,prem\,res} = 3 \cdot \sigma_{nl} \cdot V_{nl}$$

- **Si noti che in QIS5**

$$NL_{pr} = \rho(\sigma) \cdot V$$

***σ*:** **variabilità complessiva** dovuta a Premium e Reserve, ottenuta mediante l'aggregazione

***V*:** **volume complessivo** è pari alla somma dei volumi delle singole LoB (sia Premi che Riserve)

La misura di volume V e la deviazione standard congiunta σ per il portafoglio complessivo Non-Life sono determinati in due fasi.

Supponendo che $\dfrac{\rho(\sigma)}{\sigma} = 3$ si ottiene un σ uguale a 14,47%.

Pertanto, questo valore penalizza le imprese di assicurazione con una volatilità molto bassa (grandi imprese/ bassa volatilità) e va a vantaggio di quelle con una volatilità molto elevata (piccole imprese/ alta volatilità).

Il calcolo di NL_{pr} per Premium e Reserve Risk (QIS5)

$$NL_{pr} = \rho(\sigma)\cdot V$$

σ: variabilità complessiva dovuta a Premium e Reserve, ottenuta mediante l'aggregazione (basata su una matrice di correlazione lineare) dei σ delle singole LoB

Il **volume** complessivo è pari alla somma dei volumi delle singole LoB (sia Premi che Riserve) ed eventualmente corretto per effetto della diversificazione geografica. Tale volume complessivo è pari alla somma del volume dei premi stimato per l'anno successivo e quello delle riserve al momento della valutazione (come verrà descritto nel seguito).

$$\rho(x) = \frac{\exp\left[N_{0.995}\sqrt{\ln(x^2+1)}\right]}{\sqrt{(x^2+1)}} - 1$$

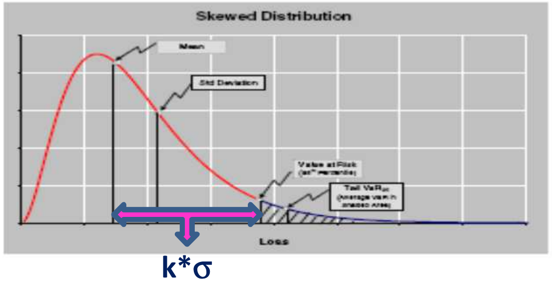
La funzione ρ(σ) ha l'obiettivo di stimare il valore di **($VaR_{99.5\%}$(X)-E(X)) noto σ(X)** con X v.a. costo aggregato dei sinistri relativo all'intero portafoglio per premium e reserve risk e V misura di volume

Tale trasformazione è stata dunque ottenuta considerando il **99.5-mo** quantile di una **LogNormale** (a 2 parametri) e una misura di rischio di tipo **VaR**.

Approssimativamente ρ(σ) è pari a circa **3*σ**

$N_{0.995}$ = quantile al livello 99,5% della Normale Standard

L'ipotesi di LogNormalità potrebbe in alcuni casi risultare non corretta (ad es. compagnie piccole o molto variabili)



Indice di asimmetria LogNormale:

$$\gamma_{LogNormal} = CV*(3+CV^2)$$

Si osservi che non è considerata in alcun modo la possibilità di riduzione delle perdite attese (dovute a variazioni sfavorevoli della sinistrosità) mediante l'utilizzo di eventuali caricamenti di sicurezza positivi né l'eventuale aggravamento di rischio in presenza di margini di redditività attesi negativi .
Tale elemento era invece inizialmente considerato nel QIS2 mediante il fattore NL_PL (decurtato dal BSCR) che considerava:

- **I caricamenti di sicurezza** empirici (stimati dalla serie storica dei CR) per il premium
- **La quota di risk margin** smontata nell'anno successivo per il reserve

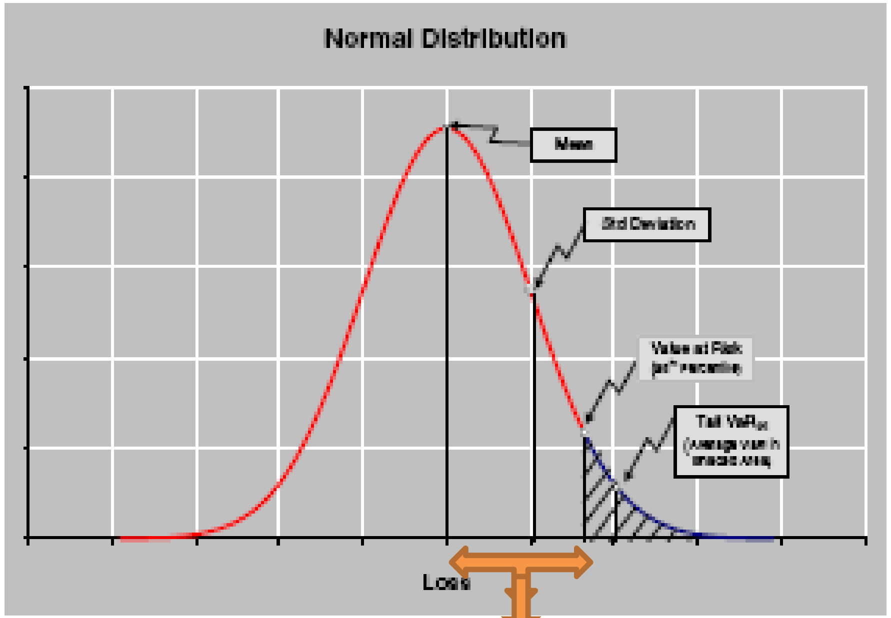
Le misure di rischio VaR e TVaR

Le principali misure di rischio sono VaR e TVaR, rispettivamente definiti come:

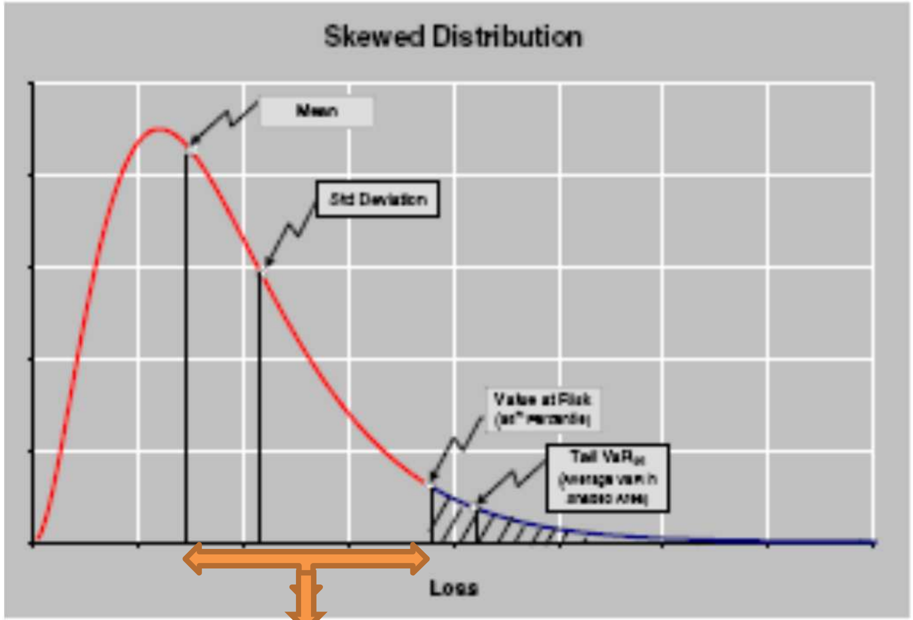
$$VaR_{\alpha} = \min_x (P(\tilde{X} > x) \geq 1-\alpha)$$

$$TVaR_{\alpha} = E(X \mid X > VaR_{\alpha})$$

La Direttiva Solvency II pone come misura di rischio il VaR$_{99,5\%}$ su un orizzonte temporale di un anno:



VaR – Exp = 2.58*σ



VaR – Exp ≈ 2.58/3,50*σ

Le fasi di calcolo del SCR_{NL}

- Determinazione delle standard deviation $\sigma_{lob,prem}$ per LoB relative al **Premium risk** mediante un approccio ***market wide*** o ***undertaking specific*** (quest'ultimo in funzione di un coefficiente di credibilità da applicare alla variabilità ottenuta in funzione dei parametri dell'impresa).
- Determinazione delle standard deviation $\sigma_{lob,res}$ per LoB relative al **Reserve risk** mediante un approccio ***market wide*** o ***undertaking specific*** (quest'ultimo in funzione di un coefficiente di credibilità da applicare alla variabilità ottenuta in funzione dei parametri dell'impresa).

- **Aggregazione** per LoB delle σ_{lob} del Premium ($\sigma_{lob,prem}$) e del Reserve ($\sigma_{lob,res}$) opportunamente ponderate con i rispettivi volumi, in modo da ottenere il σ della singola LoB.
- Determinazione del **σ complessivo** mediante aggregazione delle σ_{LoB} considerando come pesi i volumi per LoB (con matrice di correlazione tra LoB fornita dalle TS del LTGA).

- Calcolo dell'indice di Diversificazione Geografica (DIV) e del **Volume** totale (Premi + Riserve), ottenuto dalla somma dei volumi delle singole LoB eventualmente ridotti per effetto dell'indice di diversificazione del ramo.
- Determinazione del **requisito complessivo (Premium+Reserve)** mediante l'applicazione della trasformazione ρ al σ complessivo e moltiplicato per il Volume totale (come sopra definito).

- **Aggregazione** del requisito **Premium+Reserve** con i requisiti ottenuti per il **CAT** e per il **Lapse** (mediante l'uso della matrice di correlazione tra i 3 sub-moduli riportata in precedenza).

Risk aggregation

- Il requisito complessivo è ottenuto dalla formula classica di aggregazione con coefficienti di correlazione prefissati:

Formula di Aggregazione

$$SCR_{non-life} = \sqrt{\sum_{i,j} CorrNL_{(i,j)} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

Matrice di Correlazione

i \ j	Non-life premium and reserve	Non-life catastrophe	Non-life lapse
Non-life premium and reserve	1	0.25	0
Non-life catastrophe	0.25	1	0
Non-life lapse	0	0	1

Sia il LTGA che i *Delegated Acts* confermano la medesima matrice di correlazione presente nel QIS5.

Misure di volume
(Premium e Reserve Risk)

Volume Premium Risk (netto riassicurazione)

$$V_{(prem,s)} = \max(P_s\,;P_{(last,s)}) + FP_{(existing,s)} + FP_{(future,s)}$$

Volume Riserve (netto riassicurazione)

Best Estimate della riserva sinistri (Risk Margin non incluso) netto riassicurazione

$$V_{(res,s)} = PCO_s$$

P_s	Stima dei premi di competenza per l'anno successivo per singolo ramo
$P_{(last,s)}$	Premi di competenza dell'anno trascorso per singolo ramo
$FP_{(existing,s)}$	**Valore attuale atteso dei premi di competenza successivi ai prossimi 12 mesi per contratti esistenti alla data di valutazione del SCR con riferimento al singolo ramo**
$FP_{(future,s)}$	**Valore attuale atteso dei premi di competenza successivi ai prossimi 12 mesi per contratti stipulati l'anno successivo alla data di valutazione del SCR con riferimento al singolo ramo**
PCO_s	Best Estimate della Riserva Sinistri per singolo ramo

Il volume complessivo e la diversificazione geografica

- **Il volume V che concorre al calcolo finale del capital charge** (non invece alle aggregazioni tra premium e reserve del singolo ramo e tra rami assicurativi) viene corretto per tenere in considerazione la diversificazione geografica all'interno di ogni singolo ramo assicurativo *s*.
- Nel caso in cui $DIV_{pr,lob}$ sia pari ad 1 (ovvero non si ha diversificazione) il volume complessivo del ramo è semplicemente la somma del volume dei premi e del volume riserve.
- Il volume totale V è ottenuto come somma dei volumi V_s dei diversi rami assicurativi esercitati.

$$V_s = \left(V_{(prem,s)} + V_{(res,s)}\right) \cdot \left(0.75 + 0.25 \cdot DIV_s\right)$$

DIV_s dovrebbe essere posto uguale a 1 per le Lobs 6,10,11 e 12 (riportate in Annex II dei DA) e per la Lob 4 (riportata in Annex XIV dei DA)

Tale **indice di Herfindhal** è:

= 1 nel caso di un'unica area geografica j

< 1 in presenza di diversificazione.

Le aree geografiche j sono:

1)Central & Western Asia - 2)Eastern Asia - 3)South and South-Eastern Asia - 4)Oceania - 5)Northern Africa - 6)Southern Africa - 7)Eastern Europe - 8)Northern Europe - 9)Southern Europe - 10)Western Europe - 11) Northern America excluding US - 12) Caribbean & Central America - 13) Eastern South America - 14)Northern, southern and western South America - 15)North-east US - 16)South-east US - 17)Mid-west US - 18)Western US

$$DIV_s = \frac{\sum_r \left(V_{(prem,r,s)} + V_{(res,r,s)}\right)^2}{\left(\sum_r \left(V_{(prem,r,s)} + V_{(res,r,s)}\right)\right)^2}$$

Aggregazione

- La determinazione della standard deviation complessiva σ avviene **mediante un doppio processo di aggregazione**:

Aggregazione tra Premium e Reserve per singola LoB

$$\sigma_s = \frac{\sqrt{\sigma^2_{(prem,s)} \cdot V^2_{(prem,s)} + \boxed{\sigma_{(prem,s)} \cdot V_{(prem,s)} \cdot \sigma_{(res,s)} \cdot V_{(res,s)}} + \sigma^2_{(res,s)} \cdot V^2_{(res,s)}}}{V_{(prem,s)} + V_{(res,s)}}$$

Si assume implicitamente un **coefficiente di correlazione pari a 0.5** tra premium e reserve

σ_{prem}, σ_{res} : standard deviation relative a premium (*prem*) o reserve (*res*) per singolo ramo (ottenute mediante gli approcci descritti nel seguito)

V_{prem}, V_{res}: volume premi o volume delle riserve del singolo ramo calcolati secondo la metodologia descritta in precedenza (*senza considerare l'effetto della diversificazione geografica*)

Aggregazione tra le varie LoB

$$\sigma_{nl} = \frac{1}{V_{nl}} \cdot \sqrt{\sum_{s,t} CorrS_{(s,t)} \cdot \sigma_s \cdot V_s \cdot \sigma_t \cdot V_t}$$

σ_s , σ_t: standard deviation premium+reserve di ogni ramo (ottenuta al passo precedente)

V: volume complessivo del singolo ramo (*senza considerare l'effetto della diversificazione geografica*)

CorrS: matrice di correlazione tra rami (riportata nella slide successiva)

Matrice di correlazione tra LoB

CorrS	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
1: Motor vehicle liability	1											
2: Other motor	0,5	1										
3: MAT	0,5	0,25	1									
4: Fire	0,25	0,25	0,25	1								
5: 3rd party liability	0,5	0,25	0,25	0,25	1							
6: Credit	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	1						
7: Legal exp.	0,5	0,5	0,25	0,25	0,5	0,5	1					
8: Assistance	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1				
9: Miscellaneous.	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1			
10:Np reins. (casualty)	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	1		
11:Np reins. (MAT)	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	1	
12:Np reins. (property)	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	1

- Si osservano correlazioni esclusivamente **positive e variabili tra 0,25 e 0,50**.

- Si segnala la forte correlazione (0,50) tra il ramo R.C.Auto e i rami C.V.T. e R.C. Generale, oltre che tra Credito e R.C.Generale.

Approccio Market Wide (MW)

Premium Risk

Volatility Factor – *Market-wide* (DA)	
LoB	***standard deviation for Premium Risk (net of reinsurance)***
Motor vehicle liability	$10\% \cdot NP_{lob}$
Other motor	$8\% \cdot NP_{lob}$
MAT	$15\% \cdot NP_{lob}$
Property	$8\% \cdot NP_{lob}$
General liability	$14\% \cdot NP_{lob}$
Credit	$12\% \cdot NP_{lob}$
Legal expenses	$7\% \cdot NP_{lob}$
Assistance	$9\% \cdot NP_{lob}$
Miscellaneous	$13\% \cdot NP_{lob}$
Np reins (cas)	17%
Np reins (MAT)	17%
Np reins (prop)	17%

- **NP_{lob}** rappresenta un **fattore di correzione** che ha l'obiettivo di considerare l'effetto di risk mitigation apportato dalla **riassicurazione *"per risk Excess-of-Loss"*.**

- La compagnia può decidere per ogni LoB se stabilirlo pari a 1 o calcolarlo secondo quanto previsto negli Annexes dei Delegated Acts.

- Il fattore di correzione per la riassicurazione non proporzionale dovrebbe essere uguale all' $\boxed{\textbf{80\%}}$ per le LoBs ***Motor vehicle liability***, ***General liability*** e ***Property*** e 100% per tutte le altre.

Approccio Market Wide (MW)

Reserve Risk

Volatility Factor – *Market-wide*	
LoBs	***standard deviation for Reserve Risk (net of reinsurance)***
Motor vehicle liability	9%
Other motor	8%
MAT	11%
Fire	10%
3rd-party liability	11%
Credit	19%
Legal expenses	12%
Assistance	20%
Miscellaneous	20%
Np reins (cas)	20%
Np reins (MAT)	20%
Np reins (prop)	20%

- **Non è presente per il reserve risk il fattore di correzione per i trattati non proporzionali (NP_{lob}).**

Un Case Study per il Premium e Reserve Risk

Dimensioni delle compagnie

- **Sono considerate n.3 «ipotetiche» Compagnie Danni (operanti in 5 rami Non-Life e Health):**
  - **OMEGA**
  - **EPSILON**
  - **DELTA**

- L' ammontare del **Volume Premi Complessivo (Lordo Riassicurazione)** all'anno t è pari a:
  - Compagnia **OMEGA** **1.000 mln** (*Euro*)
  - Compagnia **EPSILON** **100 mln** (*Euro*)
  - Compagnia **DELTA** **1.000 mln** (*Euro*)

- Si ipotizza che OMEGA e EPSILON **abbiano lo stesso mix di portafoglio in 5 rami, mentre per la compagnia DELTA vi sia una minore concentrazione nel ramo R.C.Auto:**

	Premi(LoB)/Premi(Totali)	OMEGA	EPSILON	DELTA
1	**Accident (Income protection)**	10%	10%	**20%**
2	**MOD**	10%	10%	**5%**
3	**Property**	15%	15%	**20%**
4	**MTPL**	55%	55%	**40%**
5	**GTPL**	10%	10%	**15%**

- **Percentuale raccolta premi (anno t) nei diversi rami**

Tutti i dati sono al lordo riassicurazione

- Si ipotizza che il rapporto **Riserva Sinistri/Premi** al lordo Riassicurazione alla fine dell'anno sia il seguente:

	Riserva Sinistri(LoB)/Premi (LoB)	OMEGA	EPSILON	DELTA
1	**Accident**	60%	60%	60%
2	**MOD**	20%	20%	20%
3	**Property**	75%	75%	75%
4	**MTPL**	150%	150%	**140%**
5	**GTPL**	300%	300%	**450%**

Riserva Sinistri = BestEstimate + RiskMargin

per semplicità per il calcolo del Risk Margin è stato utilizzato un valore pari al 50% delle Proxy ipotizzate dagli studi di impatto.

- Si ipotizza che il rapporto **Riserva Premi/Premi** al lordo Riassicurazione alla fine dell'anno sia il seguente:

	Riserva Premi(LoB)/Premi (LoB)	- OMEGA - EPSILON - DELTA
1	**Accident**	40%
2	**MOD**	38%
3	**Property**	70%
4	**MTPL**	30%
5	**GTPL**	40%

Per contratti poliennali

	- OMEGA - EPSILON - DELTA	$FP_{Existing}/RP(t)$	$FP_{future}/RP(t+1)$
1	**Accident**	20%	20%
2	**MOD**	5%	5%
3	**Property**	30%	30%
4	**MTPL**	5%	5%
5	**GTPL**	20%	20%

Le principali caratteristiche

Ammontare dei Volumi (mln €)
Compagnia OMEGA

	Premi (B_{t+1})	FP^{exist} + FP^{future}	V(Premium)	BE_t	V(Premium+ Reserve)	V(Premium) /V(TOT)	V(Reserve) /V(TOT)	V(Prem+Res)/V(TOT)
Accident	105,00	16,40	121,40	56,60	178,00	4,99%	2,33%	7,32%
MOD	105,00	3,90	108,90	19,61	128,50	4,48%	0,81%	5,28%
Property	157,50	64,58	222,08	109,49	331,56	9,13%	4,50%	13,63%
MTPL	577,50	16,91	594,41	793,27	1.387,68	24,43%	32,61%	**57,04%**
GTPL	105,00	16,40	121,40	285,71	407,11	4,99%	11,74%	**16,73%**
Total	**1.050,00**	**118,18**	**1.168,18**	**1.264,68**	**2.432,87**	**48,02%**	**51,98%**	**100,00%**

La Compagnia EPSILON presenta volumi pari a 1/10 della Compagnia OMEGA per ciascun ramo, sia per i Premi che per i Sinistri

Ammontare dei Volumi (mln €)
Compagnia DELTA

	Premi (B_{t+1})	FP^{exist} + FP^{future}	V(Premium)	BE_t	V(Premium+ Reserve)	V(Premium) /V(TOT)	V(Reserve) /V(TOT)	V(Prem+Res)/V(TOT)
Accident	210,00	32,80	242,80	113,21	356,01	9,13%	4,26%	13,39%
MOD	52,50	1,95	54,45	9,80	64,25	2,05%	0,37%	2,42%
Property	210,00	86,10	296,10	145,99	442,09	11,14%	5,49%	16,63%
MTPL	420,00	12,30	432,30	538,46	970,76	16,26%	20,26%	**36,52%**
GTPL	157,50	24,60	182,10	642,86	824,96	6,85%	24,19%	**31,04%**
Total	**1.050,00**	**157,75**	**1.207,75**	**1.450,32**	**2.658,06**	**45,44%**	**54,56%**	**100,00%**

Risultati preliminari

SCR/Premi Lordi Iniziali (Delegated Acts - MW) per singolo Ramo

PREMIUM RISK (MW)

	OMEGA	EPSILON	DELTA
Infortuni	30,96%	30,96%	30,96%
CVT	26,13%	26,13%	26,13%
Property	35,53%	35,53%	35,53%
RCA	32,42%	32,42%	32,42%
RCG	50,99%	50,99%	50,99%

[10%*3*V(Premium)]/Premi(t)=30%*(594,41/550)=32,42%

RESERVE RISK (MW)

	OMEGA	EPSILON	DELTA
Infortuni	23,77%	23,77%	23,77%
CVT	4,71%	4,71%	4,71%
Property	21,90%	21,90%	21,90%
RCA	38,94%	38,94%	36,35%
RCG	94,29%	94,29%	141,43%

[11%*3*BE]/Premi(t)=33%(642,86/150)=141,43%

[9%*3*BE]/Premi(t)=27%(793,27/550)=38,94

Aggregazione tra Premium Risk e Reserve Risk *(correlazione pari a +0.50 per ogni ramo)*

PREM. RISK (MW) + RES. RISK (MW)

	OMEGA	EPSILON	DELTA
Infortuni	44,97%	44,97%	44,97%
CVT	26,82%	26,82%	26,82%
Property	46,84%	46,84%	46,84%
RCA	58,11%	58,11%	55,95%
RCG	122,74%	122,74%	166,03%

NB: per DELTA differente rapporto RS/Premi

Volatility Factor - MW

LoB	Prem. Risk	Res. Risk
Infortuni	8,5%	14,0%
CVT	8,0%	8,0%
Property	8,0%	10,0%
RCA	10,0%	9,0%
RCG	14,0%	11,0%

Alcuni Commenti

- La deviazione standard complessiva σ_{nl} è pari alla media ponderata delle $\sigma_{nl,lob}$ (con pesi dipendenti dalla misura del volume di ciascuna LoB) solo nell'ipotesi che vi sia una piena correlazione tra le Lobs.

- Nel caso di piena correlazione, SCR_{nl} è la somma dei singoli $SCR_{n,lob}$

- Nell'ipotesi di correlazione formulata nella Formula Standard, osserviamo valori di σ_{nl} e SCR_{nl} più bassi rispetto al caso di piena correlazione a causa dell'effetto di diversificazione.

Ipotesi di **piena correlazione**

Pesi

$$\frac{SCR_{nl}}{B} = \frac{\sum_{lob} SCR_{lob}}{\sum_{lob} B_{lob}} = \sum \left[\frac{SCR_{lob}}{B_{lob}}\right] \frac{B_{lob}}{\sum_{lob} B_{lob}} \quad where$$ B= Total Gross Premiums in t

B_{lob}= Total Gross Premiums of each Lob at time t

Non-Life & Health SCR ed effetto aggregazione

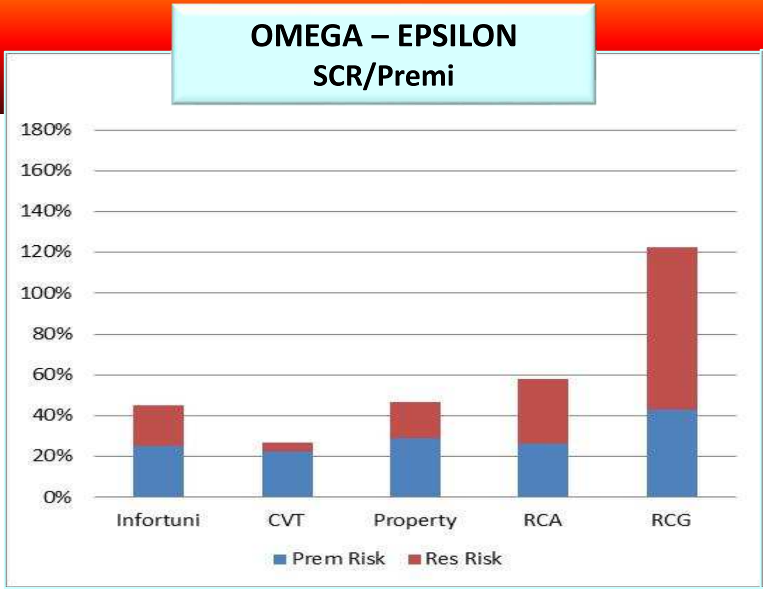
	Non-Life			Health Non-SLT			Non-Life + Health
	Non-Life Pr. Risk (MW)	Non-Life Res. Risk (MW)	Non-Life Pr. Risk +Res. Risk (MW)	Health Pr. Risk (MW)	Health Res. Risk (MW)	Health Pr. Risk(MW) +Res. Risk(MW)	Health + Non-Life
OMEGA	27,02%	31,90%	**47,40%**	30,96%	23,77%	**44,97%**	***42,90%***
EPSILON	27,02%	31,90%	**47,40%**	30,96%	23,77%	**44,97%**	***42,90%***
DELTA	27,33%	40,96%	**55,16%**	30,96%	23,77%	**44,97%**	***45,03%***

Diverso Mix di portafoglio

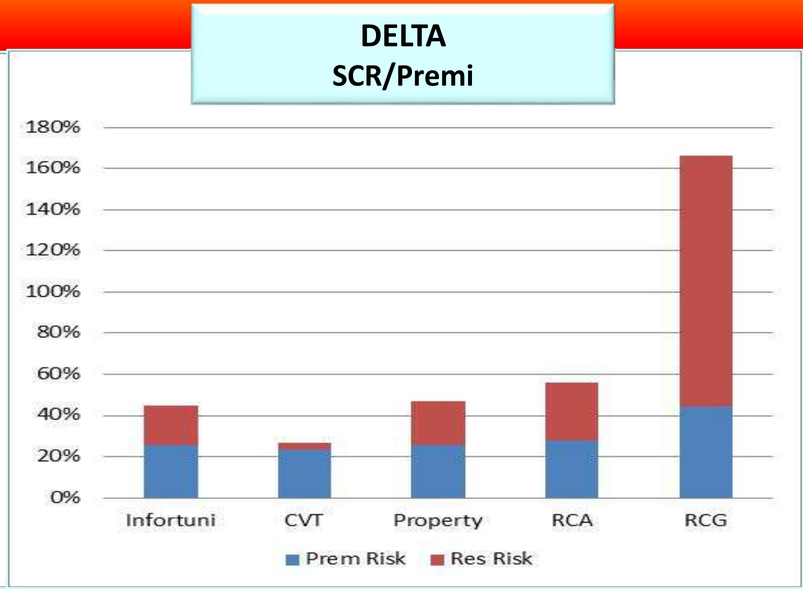
Diverso Mix di portafoglio e diversi requisiti per RCA e RCG

Health e Non-Life indipendenti

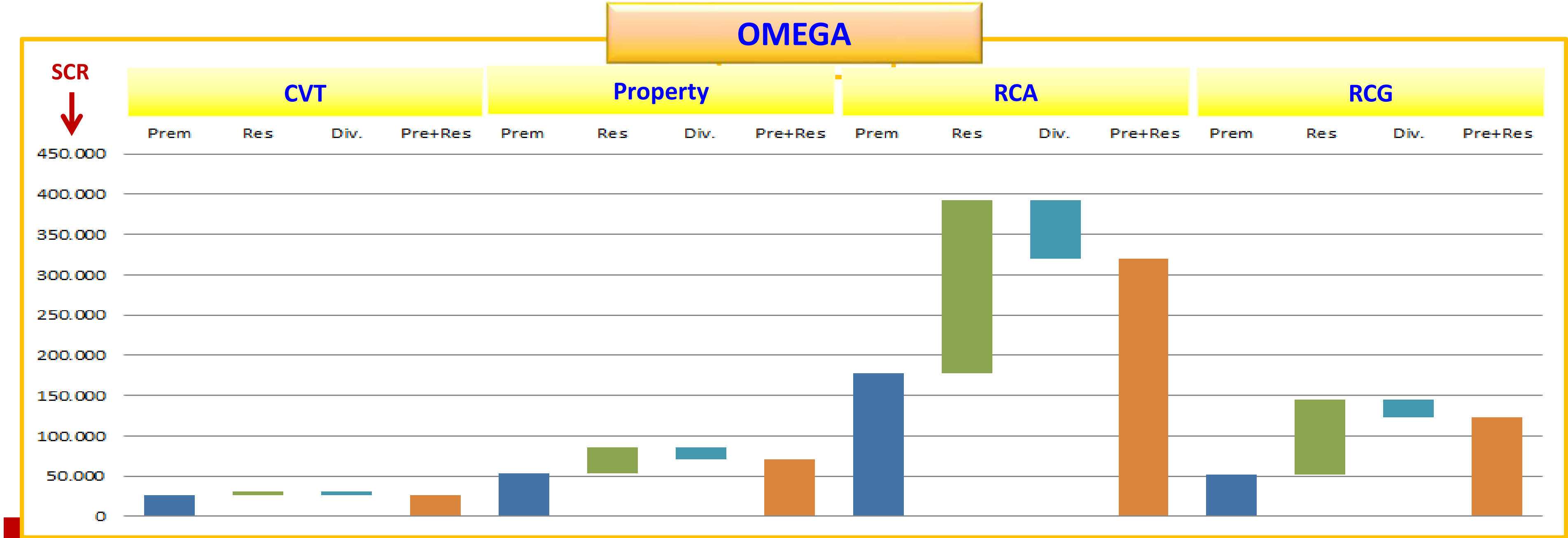
L'effetto di diverse ipotesi di aggregazione			
SCR (Non-Life + Health) /Premi Iniziali			
	Indip.	Corr. D.A.	Full Corr.
OMEGA	34,29%	***42,90%***	54,07%
EPSILON	34,29%	***42,90%***	54,07%
DELTA	34,55%	***45,03%***	58,59%



OMEGA – EPSILON
SCR/Premi
180%
160%
140%
120%
100%
80%
60%
40%
20%
0%
Infortuni
CVT
Property
RCA
RCG
Prem Risk
Res Risk



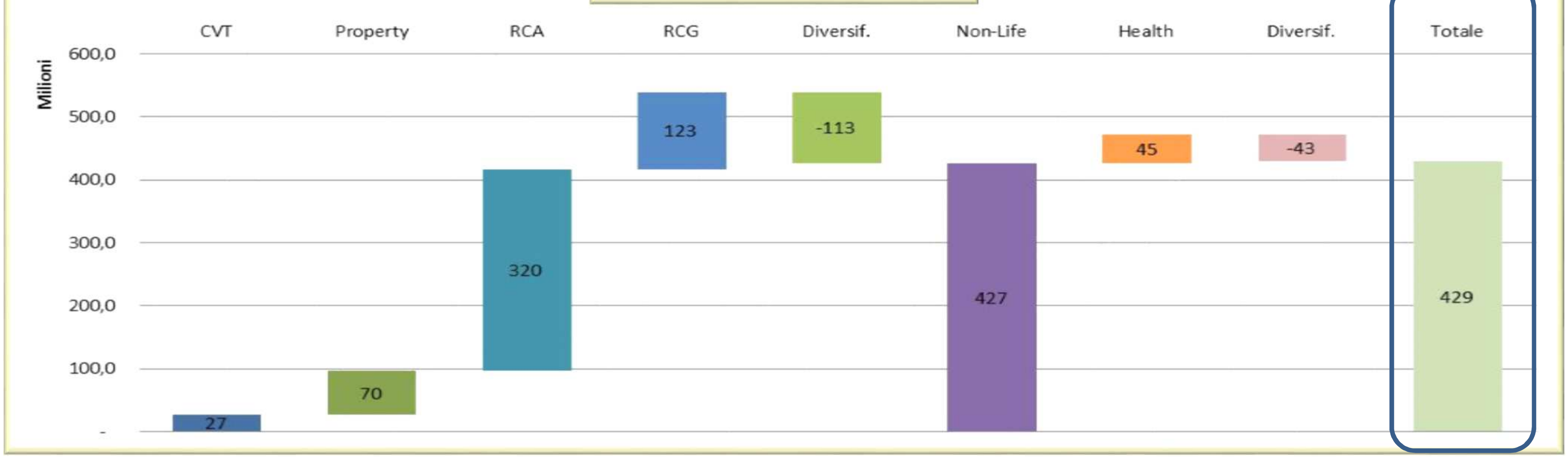
DELTA
SCR/Premi
180%
160%
140%
120%
100%
80%
60%
40%
20%
0%
Infortuni
CVT
Property
RCA
RCG
Prem Risk
Res Risk



OMEGA
SCR
CVT
Property
RCA
RCG
Prem
Res
Div.
Pre+Res
450.000
400.000
350.000
300.000
250.000
200.000
150.000
100.000
50.000
0

Costruzione SCR per NL&Health Underwriting Risk

OMEGA



DELTA

Parte II.

METODOLOGIE DI VALUTAZIONE PER IL PREMIUM RISK

Scomposizione del Risultato Tecnico: Premium e Reserve Risk

Una formulazione della Risk Reserve (1/2)

- E' possibile definire la v.a. $\mathbf{U_t}$, che descrive la ***risk reserve*** nell'anno t (tra t-1 e t), nel seguente modo semplificato nel quale (*ipotizzando per il momento assenza di riassicurazione passiva*):

$$\tilde{U}_t = \tilde{U}_{t-1} \cdot (1+j) + \underbrace{\boxed{\left[B_t^{earn} - \tilde{X}_t^{earn} - \tilde{E}_t\right]}}_{\text{Technical Result (TR)}}$$

- con:
  - U_{t-1} v.a. che descrive la *risk reserve iniziale* (nota se ci poniamo in t-1)
  - B_t^{earn} *premi di competenza* dell'anno relativi a tutto il portafoglio
  - X_t^{earn} v.a. *costo aggregato dei sinistri di competenza dell'anno* relativi a tutto il portafoglio
  - E_t v.a. *spese sostenute nell'anno* per tutto il portafoglio
  - j *tasso di rendimento finanziario*

Una formulazione della Risk Reserve (2/2)

Focalizzando l'attenzione sul saldo assicurativo, ponendo per semplicità j=0, ed ipotizzando L rami assicurativi si ottiene il ***Technical Result*** seguente:

$$\tilde{TR}_t = \left[\sum_{h=1}^{L} B_{t,h}^{earn} - \sum_{h=1}^{L} \tilde{X}_{t,h}^{earn} - \sum_{h=1}^{L} \tilde{E}_{t,h} \right]$$

$$\tilde{TR}_t = \sum_{h=1}^{L} \left(B_{t,h}^{writt} + VP_{t-1,h} - VP_{t,h} \right) - \sum_{h=1}^{L} \left(\tilde{X}_{t,h}^{paid} + \tilde{VS}_{t,h} - VS_{t-1,h} \right) - \sum_{h=1}^{L} \tilde{E}_{t,h}$$

Indicando con:
- $B_{t,h}^{writt}$ = *premi contabilizzati* dell'anno t per la LoB h
- $VP_{t-1,h}$ e $VP_{t,h}$ = *riserva premi iniziale e finale* della LoB h
- $X_{t,h}^{paid}$ = v.a. *costo aggregato dei sinistri pagati nell'anno t* per la LoB h, ottenuto come somma dei pagamenti per sinistri accaduti nell'esercizio ($X_{t,h}^{paid,ES}$) e accaduti negli esercizi precedenti ($X_{t,h}^{paid,PREC}$)
- $VS_{t,h}$ = v.a. che rappresenta la riserva sinistri finale della LoB h, ottenuta come somma della riserva per sinistri accaduti nell'esercizio ($VS_{t,h}^{ES}$) e per sinistri accaduti negli esercizi precedenti ($VS_{t,h}^{EP}$)
- $VS_{t-1,h}$ = *riserva sinistri iniziale* della LoB h

Premium Risk e Reserve Risk (1/2)

- *Tralasciando le componenti relative ai catastrofali*,ovvero ipotizzando di depurare la parte premium e la parte reserve dai sinistri catastrofali e di trattarli a parte, così come richiede Solvency II, si ottiene:

$$
\tilde{TR}_t = \sum_{h=1}^{L} \left(B_{t,h}^{writt} + VP_{t-1,h} - VP_{t,h} \right) +
$$

$$
- \sum_{h=1}^{L} \left(\tilde{X}_{t,h}^{paid,ES} + \tilde{X}_{t,h}^{paid,EP} + \tilde{VS}_{t,h}^{ES} + \tilde{VS}_{t,h}^{EP} - VS_{t-1,h} \right) - \sum_{h=1}^{L} \tilde{E}_{t,h}
$$

$$
\tilde{TR}_t = \sum_{h=1}^{L} \left(\underbrace{B_{t,h}^{writt} + VP_{t-1,h} - VP_{t,h}}_{} - \underbrace{\tilde{X}_{t,h}^{paid,ES} - \tilde{E}_{t,h} - \tilde{VS}_{t,h}^{ES}}_{} \right) +
$$

$$
+ \sum_{h=1}^{L} \left(\underbrace{VS_{t-1,h}}_{} - \underbrace{\tilde{X}_{t,h}^{paid,EP} - \tilde{VS}_{t,h}^{EP}}_{} \right)
$$

Premium Risk al netto degli Utili/Perdite attese

Reserve Risk

Premium Risk e Reserve Risk (2/2)

- In alternativa, si può anche scrivere:

$$
\begin{aligned}
T\tilde{R}_t = {} & \underbrace{\sum_{h=1}^{L}\left(B_{t,h}^{writt} + VP_{t-1,h} - VP_{t,h} - E\left(\tilde{X}_{t,h}^{paid,ES} + \tilde{E}_{t,h} + V\tilde{S}_{t,h}^{ES}\right)\right)}_{\text{Utili/Perdite attese}} + \\
& + \sum_{h=1}^{L}\underbrace{\left(E\left(\tilde{X}_{t,h}^{paid,ES} + \tilde{E}_{t,h} + V\tilde{S}_{t,h}^{ES}\right) - \tilde{X}_{t,h}^{paid,ES} - \tilde{E}_{t,h} - V\tilde{S}_{t,h}^{ES}\right)}_{\text{Premium Risk}} + \\
& + \sum_{h=1}^{L}\underbrace{\left(VS_{t-1,h} - \tilde{X}_{t,h}^{paid,EP} - V\tilde{S}_{t,h}^{EP}\right)}_{\text{Reserve Risk}}
\end{aligned}
$$

Premio di rischio: $P_t = E(X_t^{ES} + VS_t^{ES})$

Caricamenti per spese: $E(E_t)$

Il Premium Risk mediante il Collective Risk Model

Premium Risk
L'impostazione generale in un orizzonte annuale

- Limitandosi alla modellizzazione del **Premium Risk** e considerando, per semplicità, un **solo ramo assicurativo**, è possibile definire la seguente relazione (one-year view 0-1):

$$\tilde{U}_1 = U_0 + \left[B_1 - \tilde{X}_1 - \tilde{E}_1 \right]$$

B_1 = premi di competenza stimati per l'esercizio.
X_1 = v.a. costo aggregato dei sinistri dell'esercizio (pagati + riservati)
E_1 = v.a. spese dell'esercizio

- Per il momento la valutazione è effettuata *al lordo della riassicurazione* e si ipotizza, per semplicità *piena coincidenza tra premi contabilizzati e premi di competenza* (è possibile comunque complicare la formulazione considerando l'effetto della variazione della riserva premi).

La variabilità delle spese

- Spesso la letteratura classica semplifica ulteriormente la formulazione **tralasciando la variabilità delle spese**. Tale approssimazione, generalmente valida nella maggiorparte dei rami, può essere comunque agevolmente superata (come si vedrà nel seguito delle slide).

- **Per il momento, si ipotizza che le spese siano deterministiche e che i caricamenti per spese raccolti dall'impresa siano pari alle spese sostenute.**

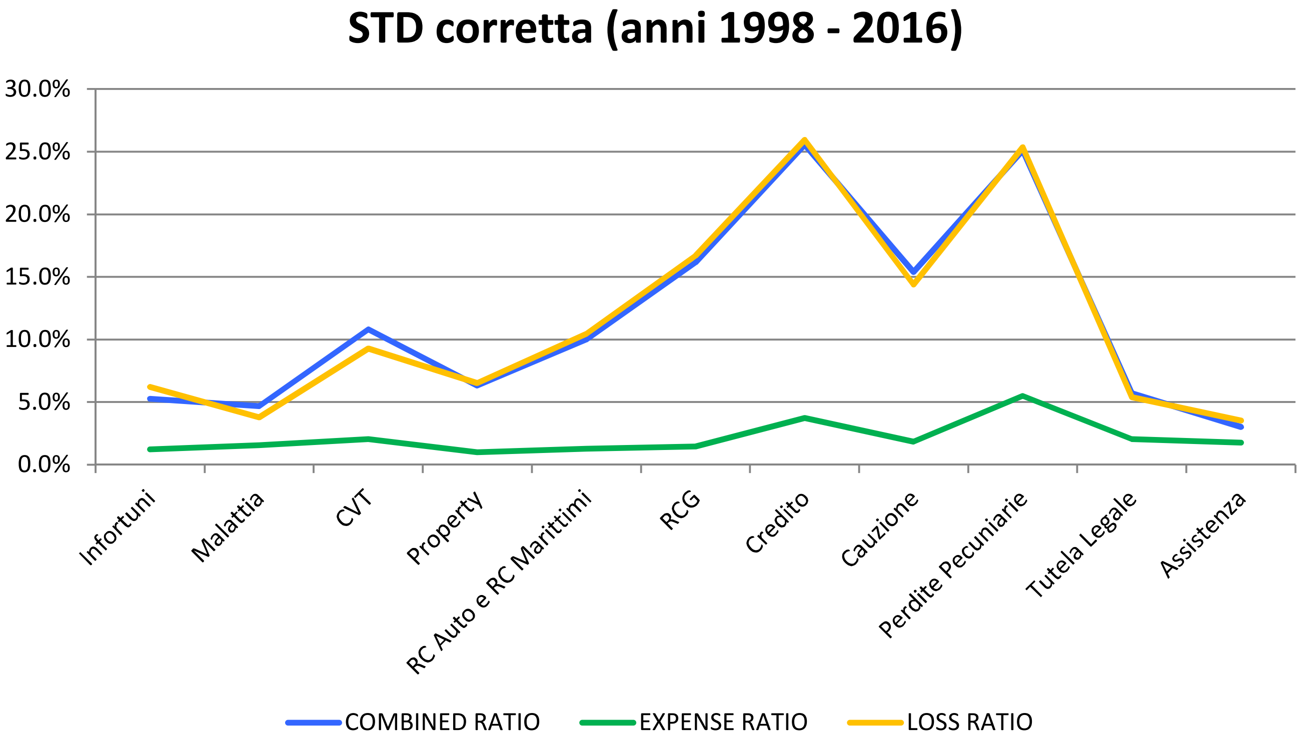
- Scomponendo il premio di tariffa B nelle tre componenti (premio di rischio, caricamento di sicurezza e caricamenti per spese) si ottiene dunque:

$$\tilde{U}_1 = U_0 + \left[P_1 + P_1 \cdot \lambda + B_1 \cdot c - \tilde{X}_1 - E_1\right]$$
$$= U_0 + \left[(1+\lambda) \cdot P_1 - \tilde{X}_1\right]$$

Ipotesi: $\mathbf{cB_1=E_1}$

P_1: premi di rischio
λ: coefficiente di caricamento di sicurezza (espresso in % dei premi di rischio P)
c: coefficiente di caricamento per spese (espresso in % dei premi di tariffa)

Variabilità Expense Ratio e Loss Ratio



Ramo	σ(ER)/ σ(LR)
Infortuni	19,8%
Malattia	41,2%
CVT	22,2%
Property	15,2%
RCA	12,3%
RCG	8,7%
Credito	14,4%
Cauzione	12,8%
Perdite Pec.	21,6%
Tutela Giud.	37,9%
Assistenza	49,9%

I σ sono ottenuti senza ponderazione con i premi. Inoltre si osservi che le correlazioni sono molto instabili al variare dell'orizzonte temporale.

Elaborazioni da Appendici Statistiche ANIA

Il Costo Aggregato dei Sinistri
Individual Risk Model

- Allo scopo di descrivere la variabile aleatoria costo aggregato dei sinistri in un generico anno è possibile utilizzare due approcci alternativi di valutazione. Nel caso si adotti un ***approccio individuale*** il costo aggregato dei sinistri in una singola unità temporale (ad es. un anno), relativo ad un portafoglio composto da N rischi omogenei, può essere definito dalla seguente relazione:

$$\boxed{\tilde{X}_t^{IND} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{Y}_{i,t}}$$

- $Y_{i,t}$ = Costo sinistri generato dal **rischio** i-simo a seguito dell'accadimento nell'unità temporale di riferimento (anno t) di nessuno, uno o più sinistri.

- Tale approccio viene definito individuale in quanto analizza separatamente ogni singolo contratto assicurativo descrivendo, mediante una variabile aleatoria *Y*, il costo dei sinistri generato dal singolo rischio indipendentemente dal numero dei sinistri (zero, uno o più sinistri).

- Quest'approccio può trovare un'applicazione concreta soprattutto nelle **valutazioni effettuate nell'ambito delle assicurazioni vita**, dove ogni singolo contratto può generare nell'anno, nella gran parte dei casi, un unico sinistro essendo quest'ultimo legato al decesso/sopravvivenza dell'individuo

Il Costo Aggregato dei Sinistri
Collective Risk Model

- L'approccio alternativo, generalmente utilizzato nell'ambito delle assicurazioni danni, si basa sulla valutazione mediante un ***approccio collettivo***:

$$\tilde{X}_t^{COLL} = \sum_{i=1}^{\tilde{k}_t} \tilde{Z}_{i,t}$$

k_t = Numero di sinistri dell'anno t
$Z_{i,t}$ = Costo del sinistro i-esimo nell'anno t

- Si ipotizza che le variabili **Z_i siano i.i.d.** (indipendenti e identicamente distribuite)

- Ipotizzando che **k e Z_i siano indipendenti**, la funzione di ripartizione del costo aggregato dei sinistri X può essere ottenuta mediante convoluzione nel modo seguente:

$$F_{\tilde{X}_{COLL}} = \Pr(\tilde{X}_{COLL} \le x) = \Pr(\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 + \ldots + \tilde{Z}_{\tilde{K}} \le x) = \sum_{K=0}^{\infty} \Pr(\tilde{K} = k) \cdot (F_{\tilde{Z}_1} \cdot F_{\tilde{Z}_2} \cdot \ldots \cdot F_{\tilde{Z}_K}(x))$$

La distribuzione del numero dei sinistri: Poisson semplice e Poisson Misturata

L'ipotesi di distribuzione di Poisson

- Se la **v.a. numero dei sinistri k** soddisfa le seguenti condizioni:
  - indipendenza degli incrementi: i numeri dei sinistri in due intervalli disgiunti sono indipendenti
  - esclusione di sinistri multipli: ciascun evento sfavorevole non può dar luogo a più di un sinistro
  - esclusione di punti temporali speciali: la probabilità che il sinistro si verifichi ad un preciso punto temporale è pari a zero

  allora k si distribuisce secondo una Distribuzione di Poisson Pura:

$$\boxed{p_k = \Pr(\tilde{k} = k) = \exp(-n) \cdot \frac{n^k}{k!}}$$

- con un solo parametro: n (strettamente positivo)
- con funzione generatrice dei cumulanti pari a: $\psi_{\tilde{k}}(s) = \ln M_{\tilde{k}}(s) = n(e^s - 1)$
- e con caratteristiche $\boxed{E(k) = n \qquad \sigma^2(k) = n \qquad \gamma(k) = 1/(n^{0,5})}$

La Poisson Misturata

- Qualora:
  - siano presenti solo oscillazioni di breve periodo
  - è presente eterogeneità dei rischi in portafoglio

  k si distribuisce secondo una Distribuzione di Poisson Misturata (Mixed Poisson):

$$\boxed{p_k = \Pr(\tilde{k} = k / \tilde{q} = q) = \exp(-nq) \cdot \frac{(nq)^k}{k!}}$$

  con la v.a. q “fattore di disturbo” avente però E(q)=1

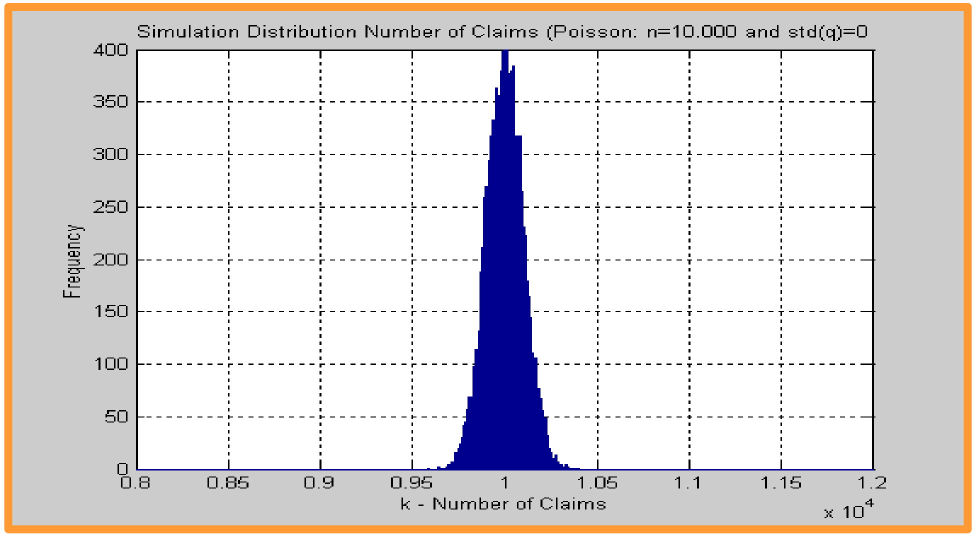
- Si introduce un doppio stadio di aleatorietà: ora il parametro non è più deterministico ma è una v.a. (= n_t*q)
- La funzione generatrice dei cumulanti risulta pari a :

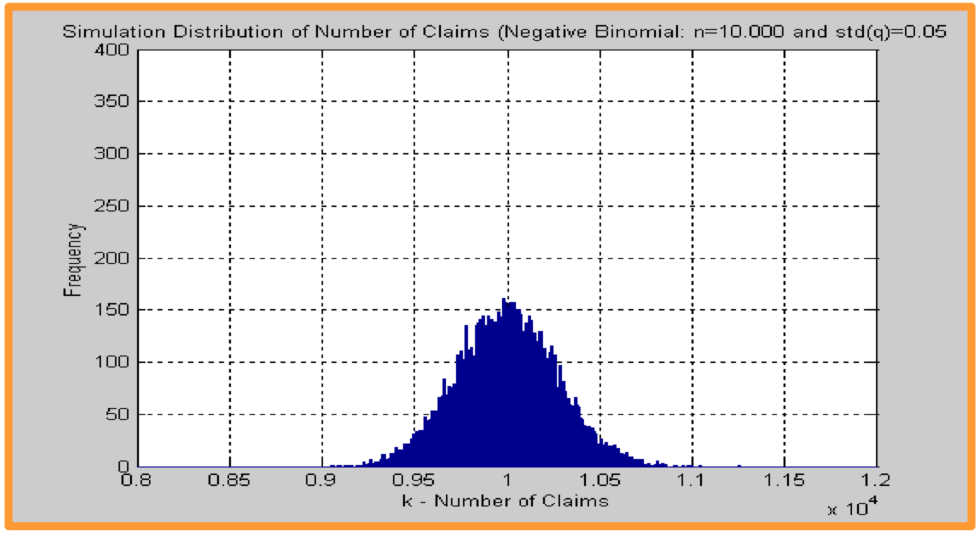
$$\psi_{\tilde{k}}(s) = \ln M_{\tilde{q}}(n \cdot (\exp(s) - 1)) = \psi_{\tilde{q}}(n \cdot (\exp(s) - 1))$$

  da cui derivare le seguenti caratteristiche:

$$\boxed{E(k) = n} \qquad \boxed{\sigma^2(k) = n + n^2 \sigma_q^2} \qquad \boxed{\gamma(k) = \left(n + 3n^2\sigma_q^2 + n^3\sigma_q^3\gamma_q\right) \Big/ \sigma^3(k)}$$

Alcuni esempi
Distribuzione numero dei sinistri (Poisson e BinNeg)





- **Poisson p.d.f.**

  n = 10.000

  σ(q) = **0%**

  risultati di 10.000 simulazioni

- **Binomiale negativa p.d.f.**

  n = 10.000

  σ(q) = **2,5%**

  risultati di 10.000 simulazioni

La distribuzione del claim size

Un esempio: la distribuzione LogNormale

- Una distribuzione classica utilizzata nella pratica è la **Distribuzione Lognormale. I**l costo del singolo sinistro Z è una LogNormale se può essere espresso nella seguente forma:

$$\boxed{\tilde{Z} = d + \exp(\tilde{Y})}$$

con d punto iniziale del range di Z e Y v.a normale con media μ e varianza σ^2

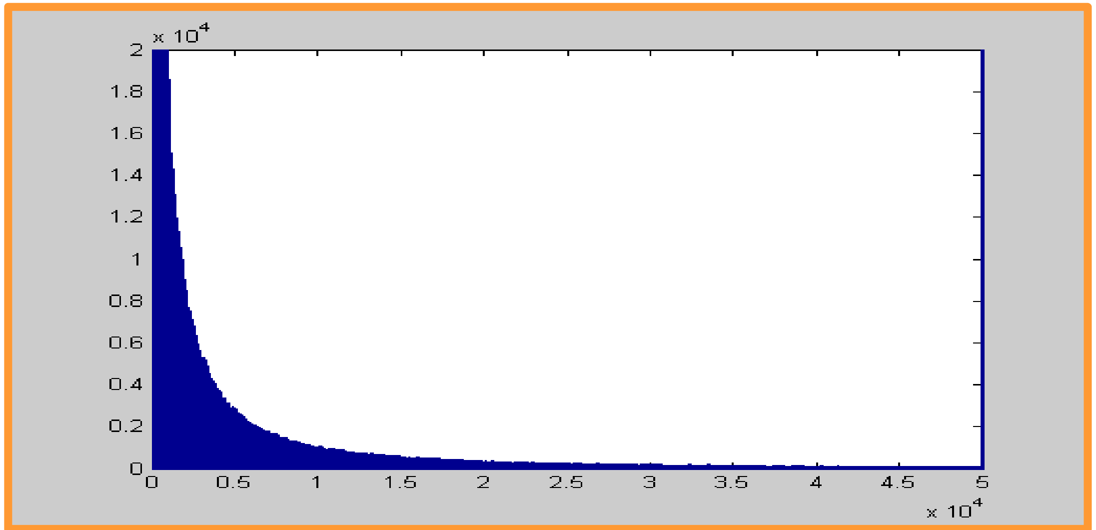
- Fissato **d=0** *(ritornando al caso di una **LogNormale a due parametri**)* e posto c_Z = coefficiente di variabilità $\sigma(Z)/E(Z)$ si ottengono i seguenti momenti:

E(Z) = m
σ(Z) = m*c_Z
γ(Z) = c_Z*(3+c_Z^2) **(N.B. sempre >0)**

- se m = € 10.000 e c_Z = 10 Media = € 10.000 Sqm = € 100.000 Skew = + 1.030
- se m = € 10.000 e c_Z = 5 Media = € 10.000 Sqm = € 50.000 Skew = + 140
- se m = € 10.000 e c_Z = 1 Media = € 10.000 Sqm = € 10.000 Skew = + 4

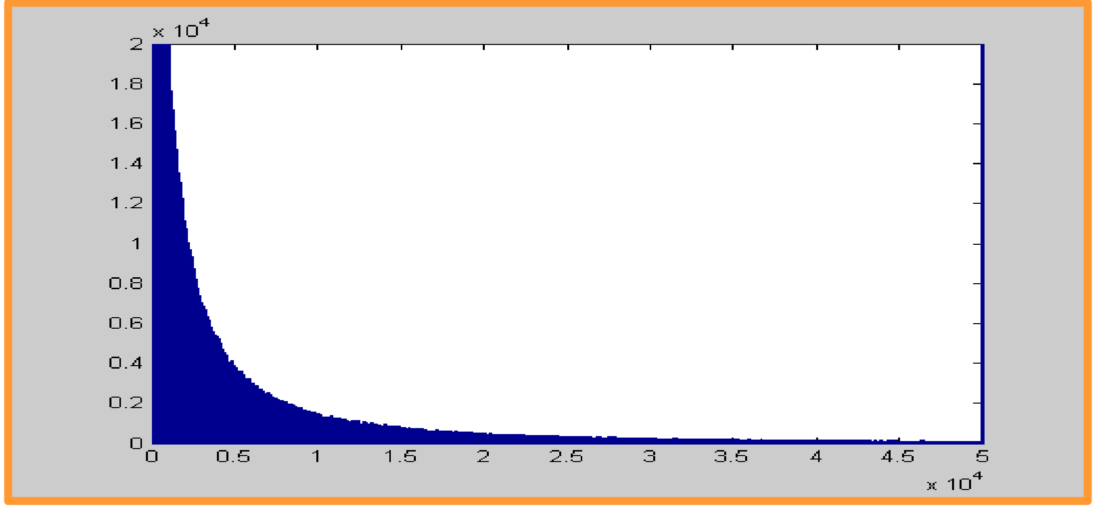
Alcuni esempi

Distribuzione del claim size (LogNormale) al variare di c_z



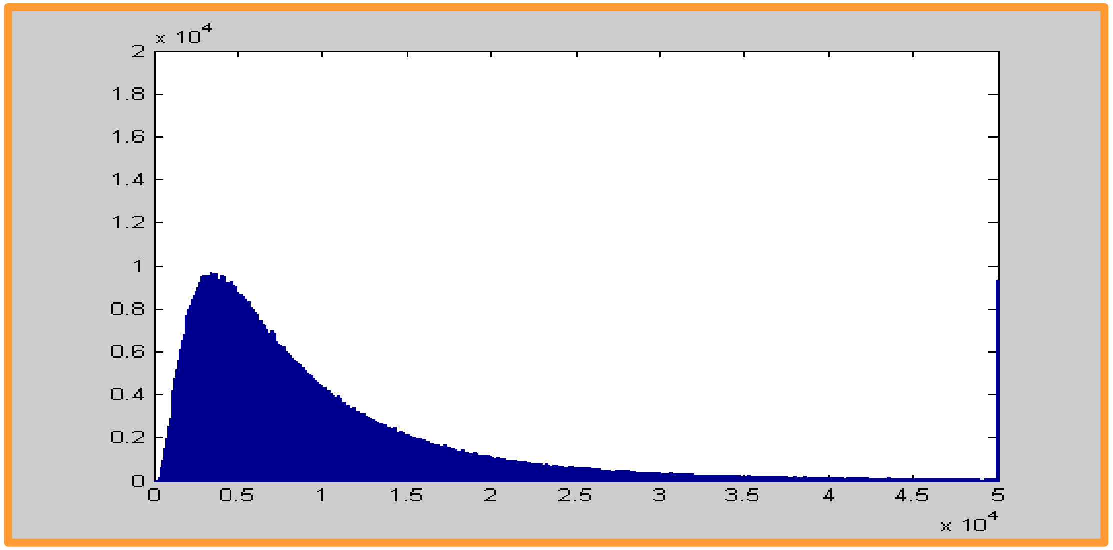
m = € 10.000

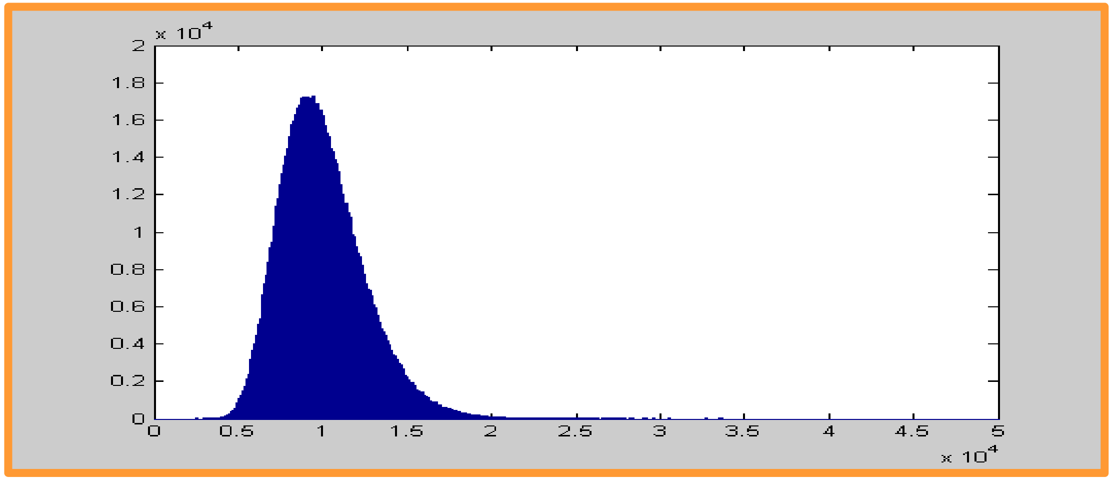
c_Z = 10



m = € 10.000

c_Z = 5





m = € 10.000

c_Z = 1,00

m = € 10.000

c_Z = 0,25

I Momenti e la Distribuzione del Costo Aggregato dei Sinistri

I momenti del costo aggregato
Processo di Poisson Composto semplice

- Se il fattore di disturbo **q non è presente** (Processo di Poisson Composto **semplice**):

$$E(\tilde{X}) = n \cdot a_{1Z} = nm$$

$$\sigma^2(\tilde{X}) = \boxed{n \cdot a_{2Z}}$$

$$\gamma(\tilde{X}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{a_{3Z}}{(a_{2Z})^{3/2}}$$

Si osservi che l'indice di asimmetria dipende per la prima componente dalla sola Poisson e per la seconda componente dalla sola distribuzione della Z (ma nel complesso sarà sempre positivo)

$\boxed{a_{jZ} = E(\tilde{Z}^j)}$ $\longrightarrow$ Momenti semplici di ordine j della v.a. Z

I momenti del costo aggregato
Processo di Poisson Composto Misturato

- Se il fattore di disturbo **q è presente** (Processo di Poisson Composto **misturato**) :

$$E(\tilde{X}) = n \cdot a_{1Z} = n \cdot m$$

$$\sigma^2(\tilde{X}) = n \cdot a_{2Z} + n^2 \cdot m^2 \cdot \sigma^2(\tilde{q})$$

$$\gamma(\tilde{X}) = \frac{n a_{3Z} + 3n^2 m a_{2Z} \sigma^2(\tilde{q}) + 2n^3 m^3 \cdot \sigma^3(\tilde{q}) \cdot \gamma(q)}{\sigma^3(\tilde{X})}$$

- In questo caso la varianza è ovviamente maggiore del caso senza fattori di disturbo
- L'indice di asimmetria è generalmente positivo ma potrebbe, in questo caso particolare, assumere valori negativi solo nel caso di forte asimmetria negativa della v.a. q ($\gamma(q)<0$)

Il CoV del Costo Sinistri X

- Interessante è anche l'analisi della variabilità del "loss-ratio" puro (rapporto sinistri/premi di rischio) che coincide con il CoV del costo sinistri X, e da cui si ottiene il seguente valore asintotico:

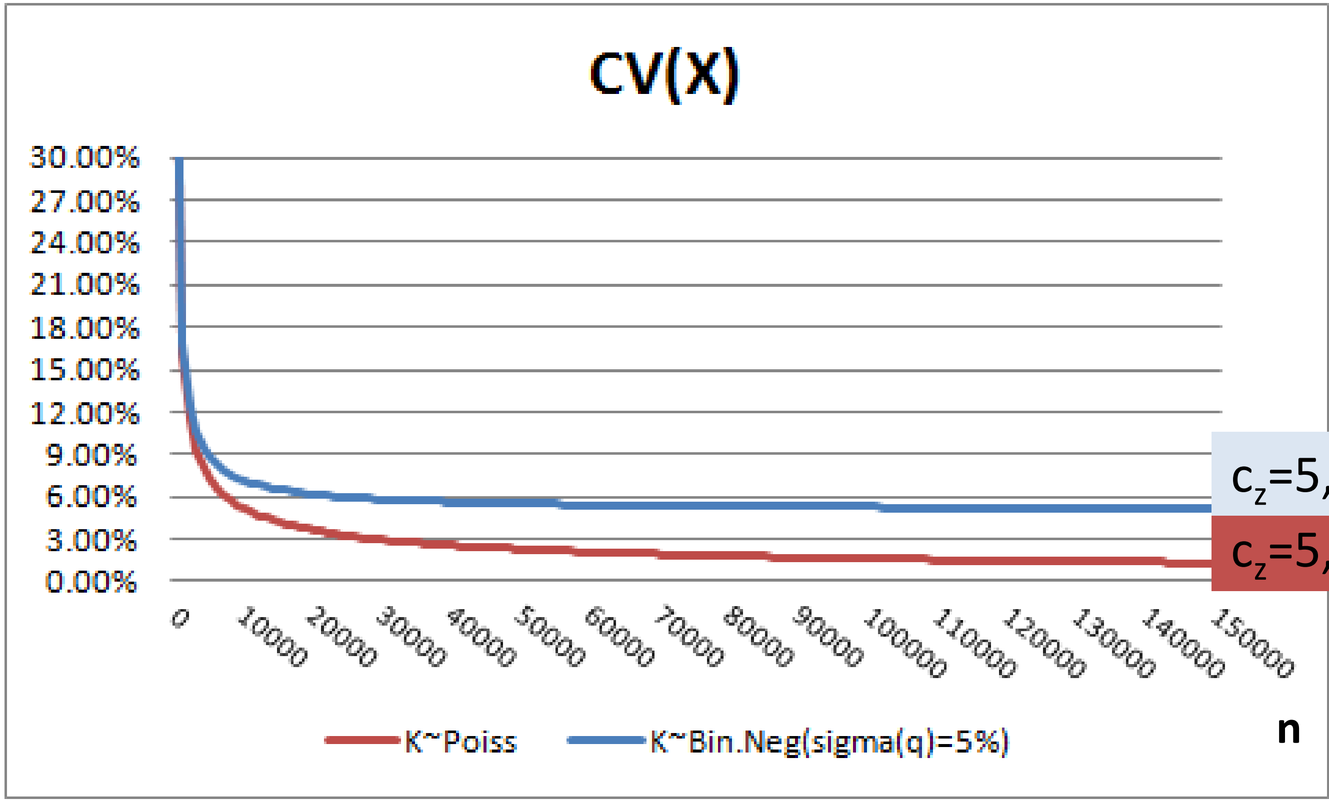
$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \sigma\left(\frac{\tilde{X}}{P}\right) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{1 + c_Z^2}{n} + \sigma^2(\tilde{q})} = \sigma(\tilde{q})}$$

laddove c_Z rappresenta il CoV del claim size.

- Come si può osservare, **la crescita del parametro dimensionale n** (che in genere avviene per l'aumento del numero dei rischi) **non annulla la variabilità dovuta al fattore di disturbo q**, che rimane un effetto sistematico e non diversificabile (se non con trattati di riassicurazione).

L'andamento dello s.q.m. del Loss Ratio Puro X/P

- E' interessante confrontare graficamente l'andamento dello scarto quadratico medio del Loss Ratio puro al variare del parametro n



c_z=5, K~Bin.Neg (σ(q)=5%)

c_z=5, K~Poisson

Il CaR
e la stima mediante la formula NP

- Considerando l'equazione ridotta della riserva di rischio e limitandosi all'orizzonte annuale (T=1), si ottiene:

$$\boxed{U_r = X_\varepsilon - (1+\lambda)\cdot P}$$

dove il quantile X_ε si ricava dall'espressione

$$\boxed{1-\varepsilon = F_{\tilde{X}}(X_\varepsilon)}$$

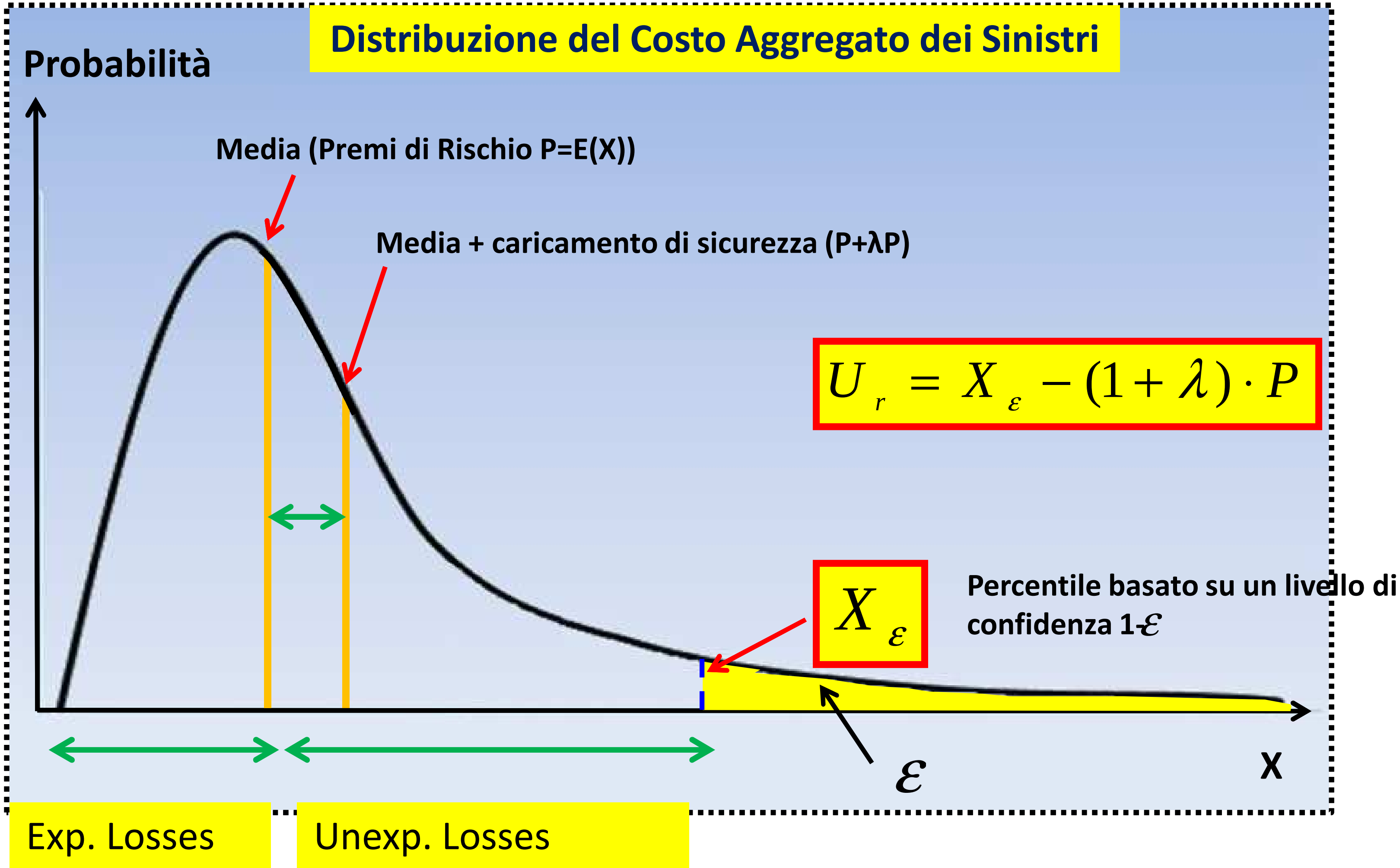
Ricorrendo all'approssimazione **Normal-Power** (dove y_ε=percentile della Normale standardizzata) si ottiene:

NB:si ricorda che la NP fornisce una discreta approssimazione del costo aggregato per valori di $\gamma(x) < 1$

$$\boxed{\frac{X_\varepsilon - E(\tilde{X})}{\sigma(\tilde{X})} \cong y_\varepsilon + \frac{y_\varepsilon^2 - 1}{6}\cdot\gamma(\tilde{X})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U_r \cong y_\varepsilon \sigma_X - \lambda \cdot P + \left(\frac{y_\varepsilon^2 - 1}{6}\gamma_X \sigma_X\right)}$$

Expected Losses, Unexpected Losses e Capital Required



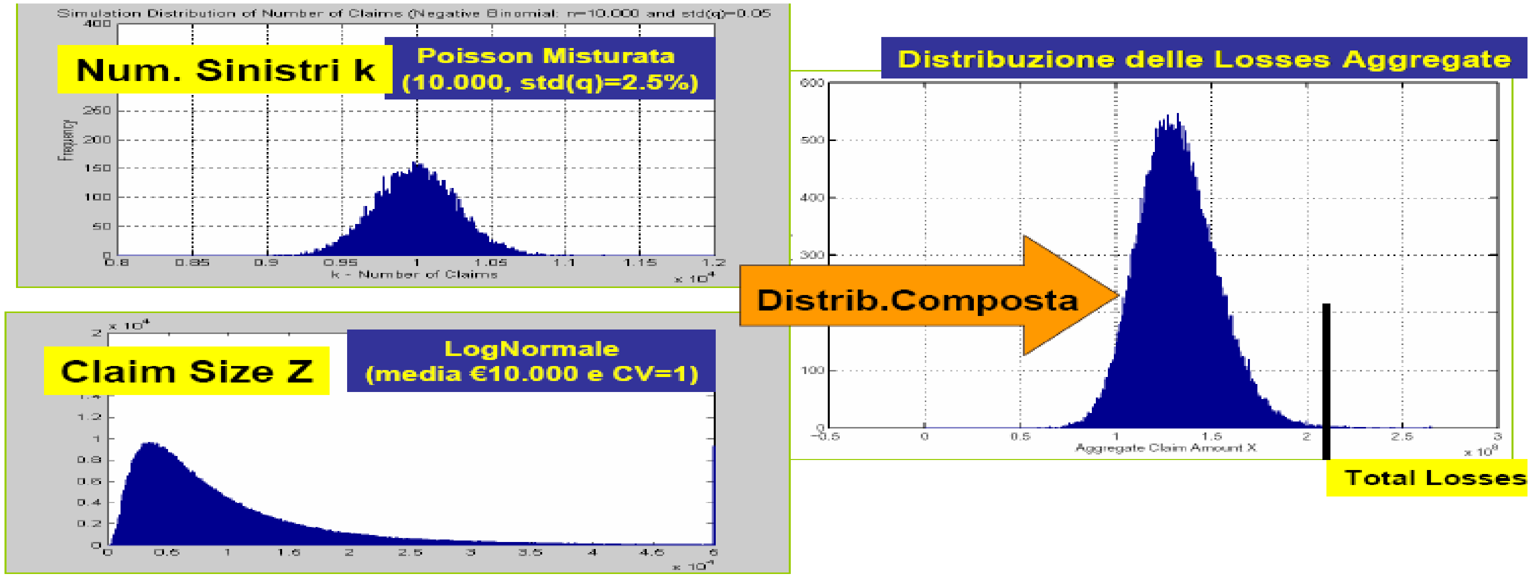
La stima del Premium Risk mediante un Collective Risk Model

L'applicazione di un Modello di T.d.Rischio (Frequency/Severity)

Collective Risk Model

Processo di Poisson Composto misturato

- Distribuzione Num. Sinistri: **Binomiale Negativa**
- Distribuzione Claim Size: **LogNormale**



Le caratteristiche delle 4 compagnie esaminate

- **Sono state considerate n. 4 diverse compagnie danni** (OMEGA,TAU, TAUHIGH, EPSILON)

- Le 4 compagnie **differiscono tra loro solo per la dimensione**, **e la variabilità della severity** (in particolare per il numero di sinistri atteso e c_Z) mentre gli altri parametri sono tutti identici (costi medi, caricamenti di sicurezza e spese, fattori di disturbo, ecc.).

- Il **Volume Premi di Tariffa** complessivo delle compagnie esaminate è il seguente:
  - Comp. **OMEGA** **1.000 mln** (Euro)
  - Comp. **TAU** e **TAUHIGH** **500 mln** (Euro) (Tau HIGH con c_z pari a 1,5 quello di TAU)
  - Comp. **EPSILON** **100 mln** (Euro)

- Per tutte e 3 le Compagnie si considera lo stesso **mix di portafoglio** nelle seguenti **5 LoB,** che essenzialmente riflettono il mix del mercato italiano:

  - LoB 1: **Infortuni** (**10%** circa totale Premi Tariffa)
  - LoB 2: **C.V.T.** (**10%** “ “ “ “)
  - LoB 3: **PROPERTY** (**15%** “ “ “ “)
  - LoB 4: **R.C.Auto** (**55%** “ “ “ “)
  - LoB 5: **RCGenerale** (**10%** “ “ “ “)

I parametri dell'Internal Model

	Rami	n_0	σ(q)	g	m_0	c_z	i	λ	exp
OMEGA	LoB1	**17.374**	14,0%	1,9%	3.200	3	3%	22,40%	31,95%
	LoB2	**18.515**	28,9%	1,9%	2.500	2	3%	64,25%	23,98%
	LoB3	**16.580**	11,2%	1,9%	6.000	8	3%	6,28%	29,51%
	LoB4	**111.316**	8,7%	1,9%	4.000	4	3%	1,88%	17,52%
	LoB5	**7.721**	13,9%	1,9%	10.000	12	3%	-7,03%	28,22%
TAU	LoB1	**8.687**	14,0%	1,9%	3.200	3	3%	22,40%	31,95%
	LoB2	**9.258**	28,9%	1,9%	2.500	2	3%	64,25%	23,98%
	LoB3	**8.290**	11,2%	1,9%	6.000	8	3%	6,28%	29,51%
	LoB4	**55.658**	8,7%	1,9%	4.000	4	3%	1,88%	17,52%
	LoB5	**3.861**	13,9%	1,9%	10.000	12	3%	-7,03%	28,22%
TAUHIGH	LoB1	8.687	14,0%	1,9%	3.200	**4,5**	3%	22,40%	31,95%
	LoB2	9.258	28,9%	1,9%	2.500	**3**	3%	64,25%	23,98%
	LoB3	8.290	11,2%	1,9%	6.000	**12**	3%	6,28%	29,51%
	LoB4	55.658	8,7%	1,9%	4.000	**6**	3%	1,88%	17,52%
	LoB5	3.861	13,9%	1,9%	10.000	**18**	3%	-7,03%	28,22%
EPSILON	LoB1	**1.737**	14,0%	1,9%	3.200	3	3%	22,40%	31,95%
	LoB2	**1.852**	28,9%	1,9%	2.500	2	3%	64,25%	23,98%
	LoB3	**1.658**	11,2%	1,9%	6.000	8	3%	6,28%	29,51%
	LoB4	**11.132**	8,7%	1,9%	4.000	4	3%	1,88%	17,52%
	LoB5	**773**	13,9%	1,9%	10.000	12	3%	-7,03%	28,22%

Legenda

n_0 = numero atteso sx (anno 0) σ(q) = std fattori disturbo g = tasso annuo crescita reale portafoglio

m_0 = costo medio sx (anno 0) **c_z = coeff. variab. costo singolo sx σ(Z)/E(Z)** i = tasso annuo inflazione sx

λ = coeff. caricamento sicurezza exp = coeff. spese (% Premi Tariffa)

Misure di rischio, Time Horizon e livelli di confidenza

– Per tali compagnie, mediante l'applicazione di un modello simulativo (**1.000.000 simulazioni**), è stato calcolato il **RBC ratio** (approccio **VaR** per TH=1 anno) secondo tre diversi livelli di confidenza:
  - 99.00 % (rating S&P BB circa)
  - **99.50 %** (QIS3/QIS4, rating S&P BBB- circa)
  - 99.97 % (rating S&P AA)

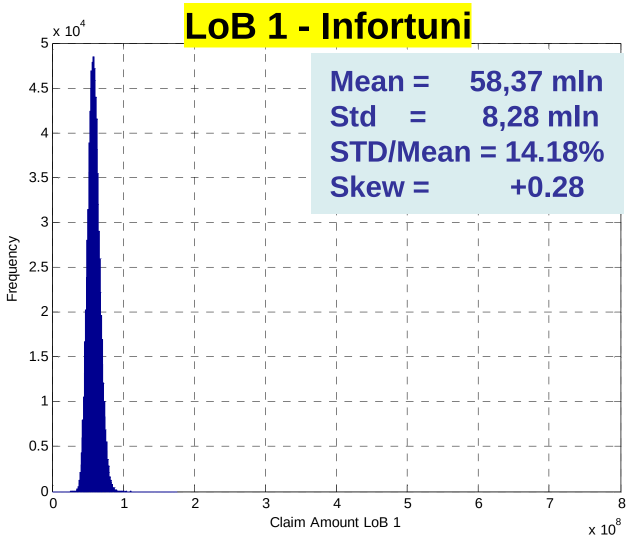
– i risultati fanno riferimento al **solo Premium Risk** e ***senza* considerare il Reserve Risk** (NB: anche l'effetto di mitigazione della ***riassicurazione*** *per il momento non è considerato)*

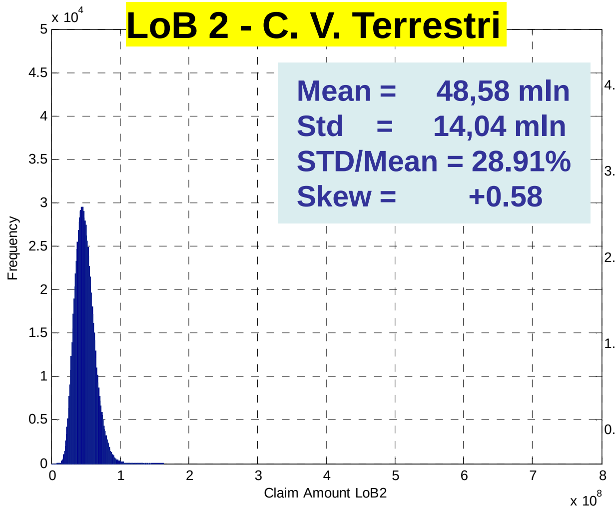
– Nel seguito faremo riferimento alle stesse 4 compagnie Danni il cui portafoglio è diversificato in **n. 5 LoB**, tutte caratterizzate (per il momento) da **reciproca indipendenza.**

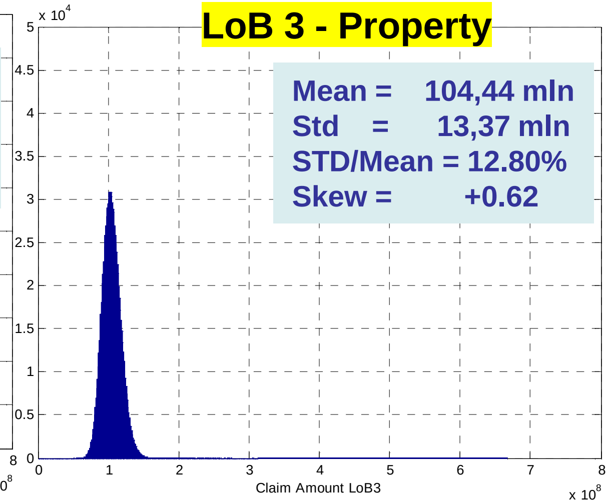
I risultati del modello simulativo per il Premium risk

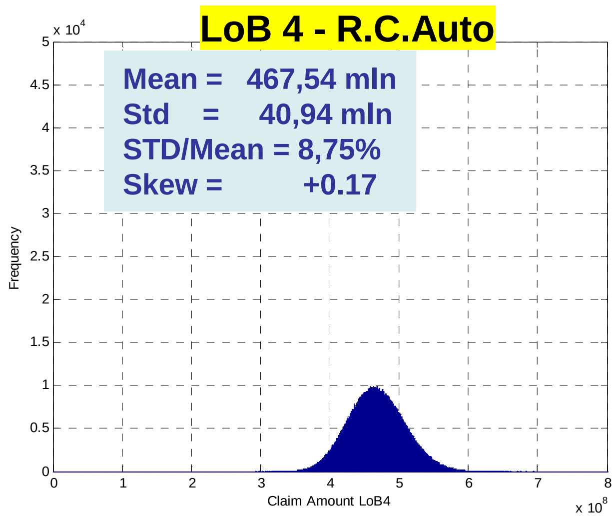
Compagnia OMEGA

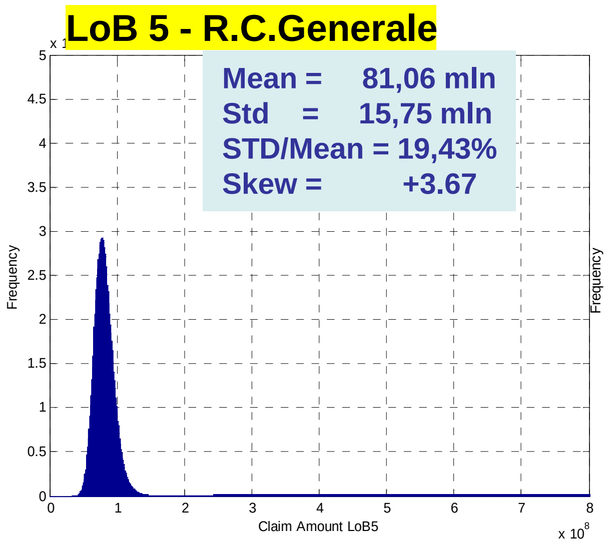
Costo Sinistri per LoB (distribuzioni simulate)

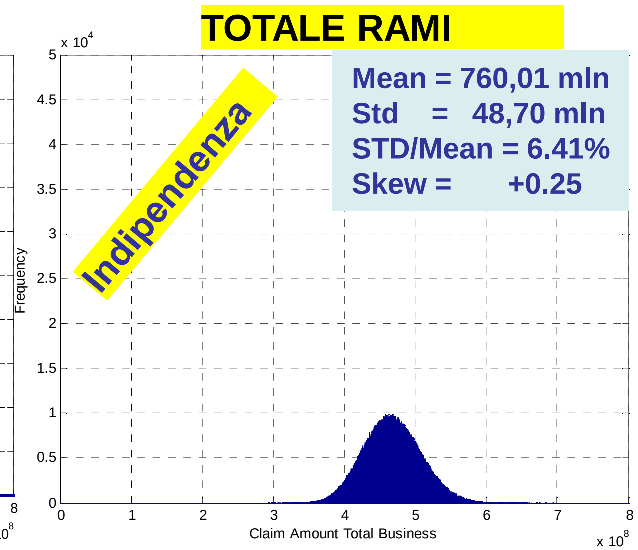






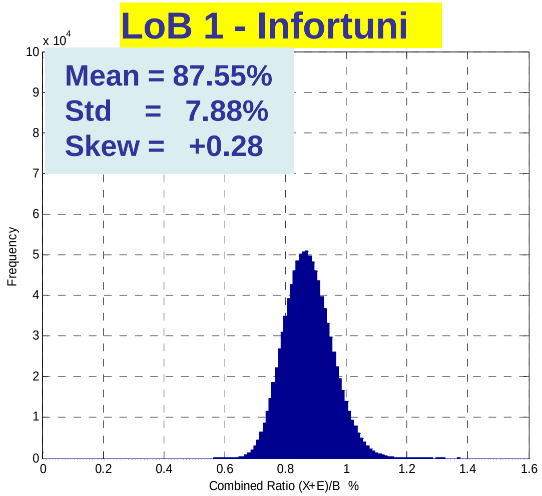


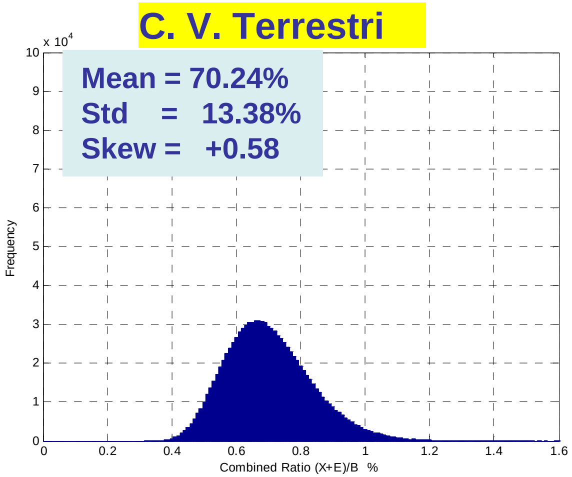


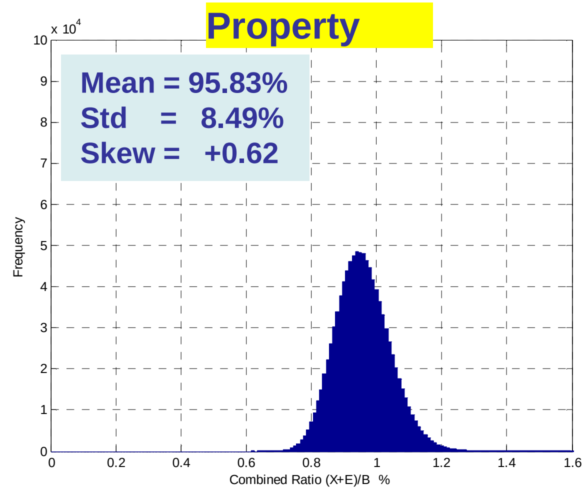


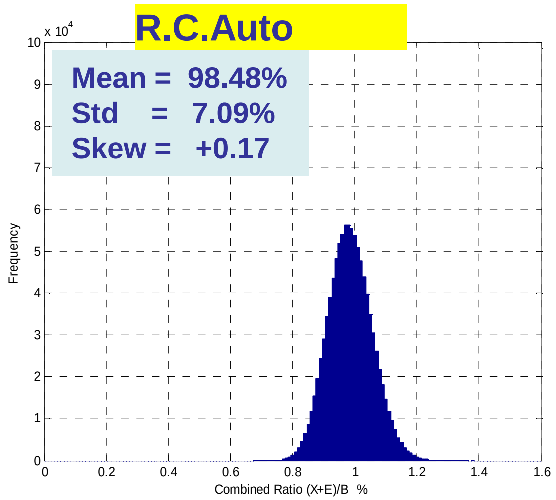
Compagnia OMEGA

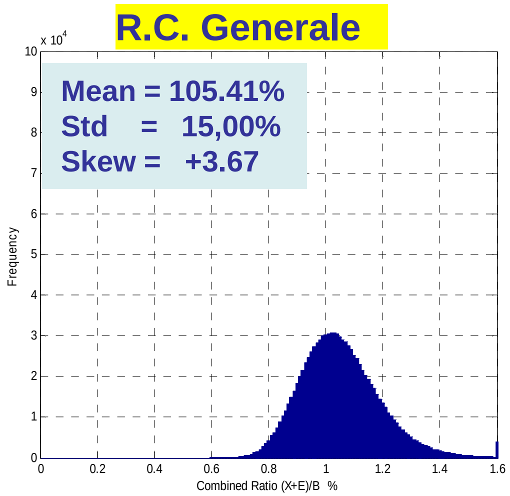
Combined Ratios per LoB (distribuzioni simulate)

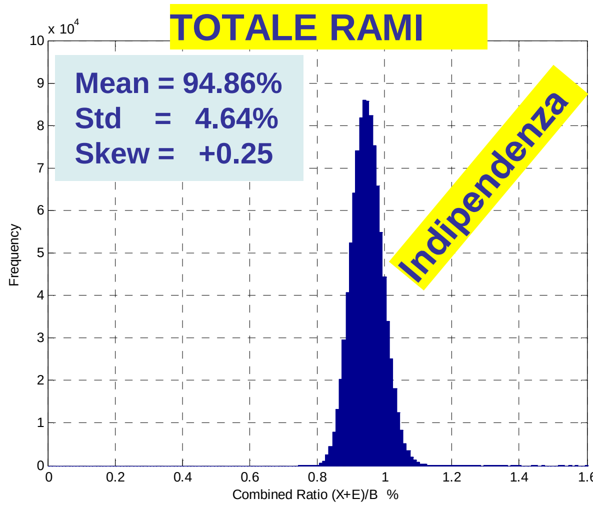






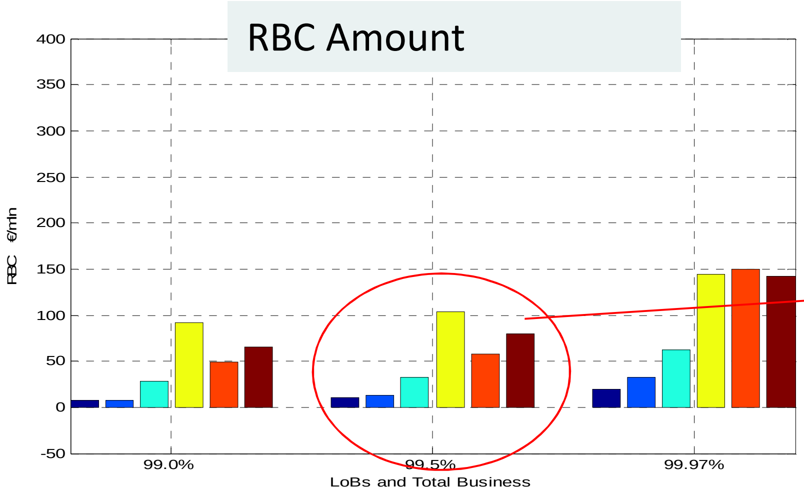






Compagnia OMEGA

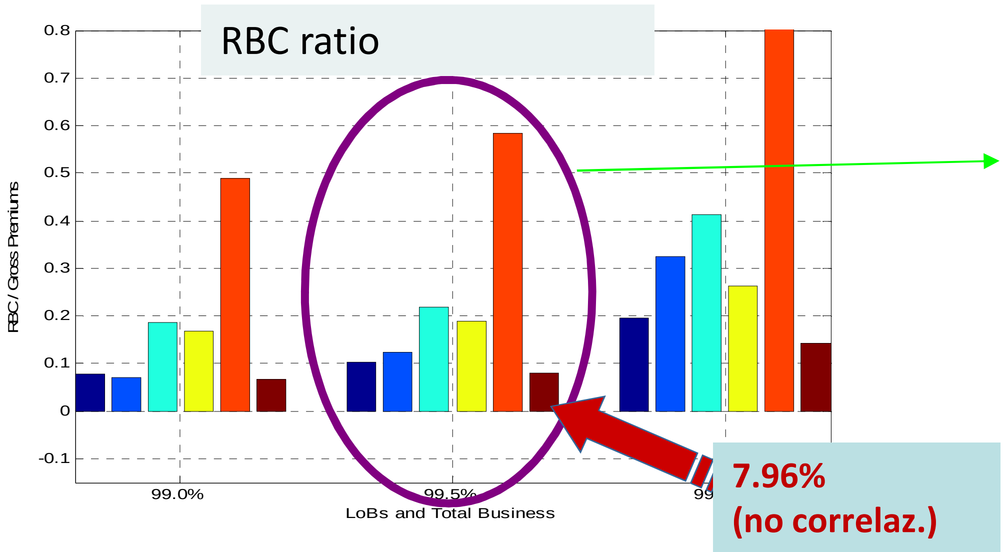
RBC e RBC ratios



La compagnia **Omega** ha un requisito al 99,5% di **79,61 mln** di Euro.

Il rapporto sull'intero portafoglio tra $(VaR_{99,5\%} - E(X))$ e $\sigma(X)$ risulta pari a **2,74**

L'analogo rapporto calcolato per singola LoB varia tra 3,35 per RCG e 2,74 per RCA.



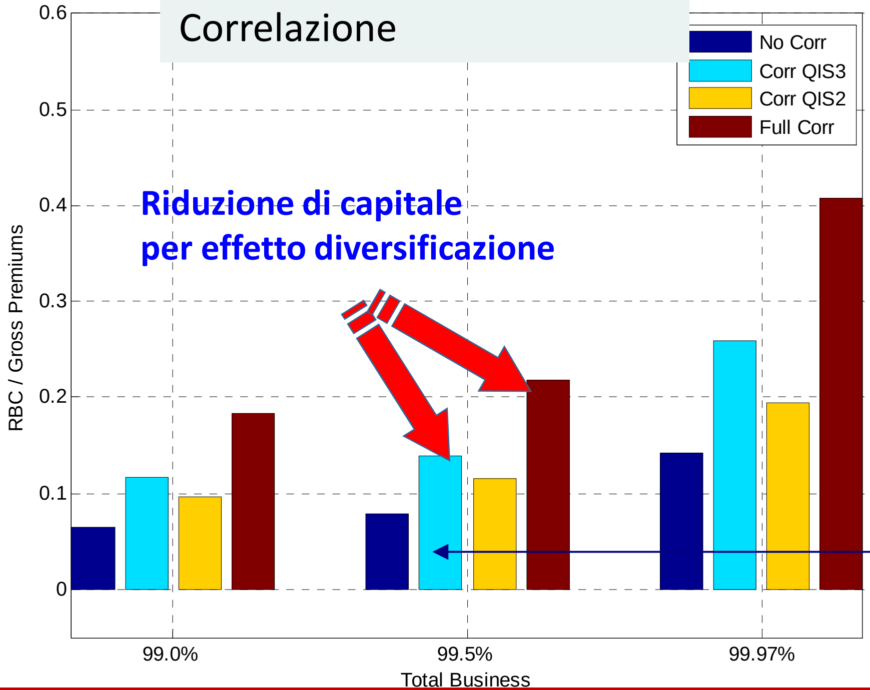
RBC ratio	99,50%
Infortuni	10,40%
CVT	12,47%
Property	21,82%
RCAuto	18,84%
RCGenerale	58,39%
Total Business	7,96%

Compagnia OMEGA
L'effetto dell'aggregazione

Matrice di Correlazione del QIS3

	Infortuni	CVT	Property	RCA	RCG
Infortuni	1	0,25	0,25	0,25	0,25
CVT	0,25	1	0,25	0,5	0,25
Property	0,25	0,25	1	0,25	0,25
RCA	0,25	0,5	0,25	1	0,5
RCG	0,25	0,25	0,25	0,5	1

Diversificazione e Correlazione



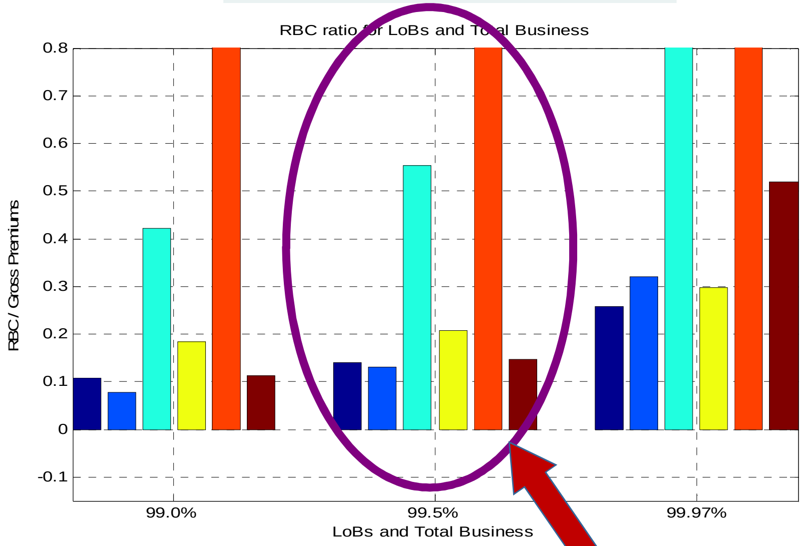
In rosso i coefficienti più alti rispetto all'analoga matrice del QIS2, in blu i coefficienti più bassi

	rbc ratio		
	99%	99,50%	99,97%
NoCorr	6,51%	7,96%	14,21%
Corr QIS3	11,63%	13,96%	25,87%
Corr QIS2	9,61%	11,49%	19,43%
Full Corr	18,33%	21,76%	40,81%

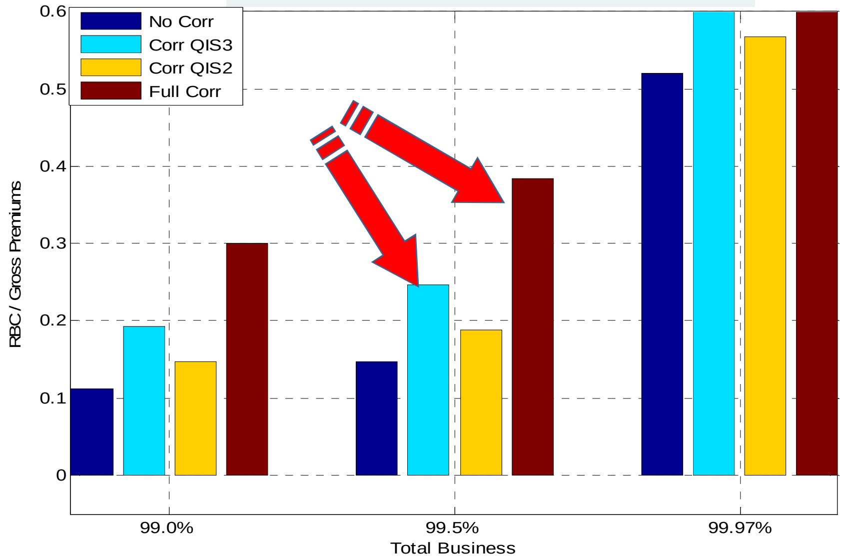
Compagnia EPSILON

RBC e RBC ratios

RBC ratio



Diversificazione e Correlazione



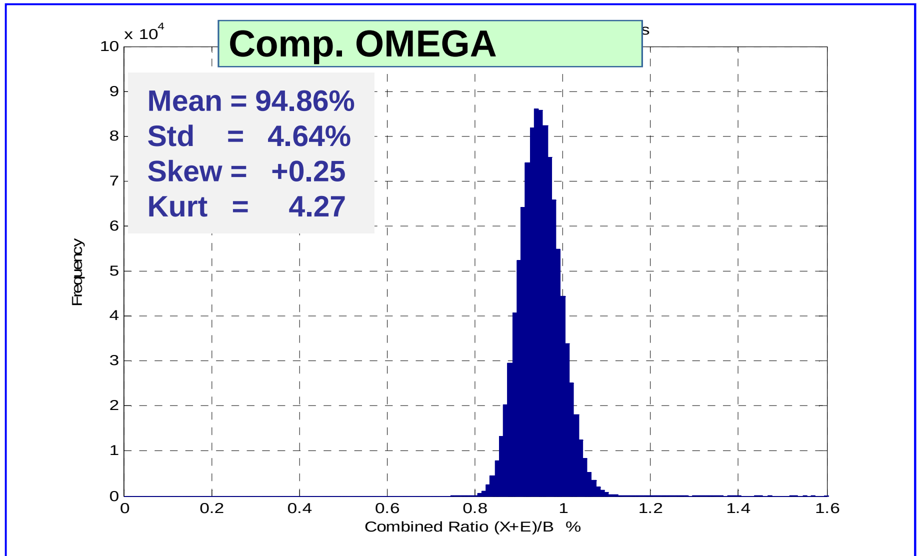
RBC ratio	99,50%
Infortuni	13,91%
CVT	13,04%
Property	55,34%
RCAuto	20,78%
RCGenerale	159,08%
Total Business	14,76%

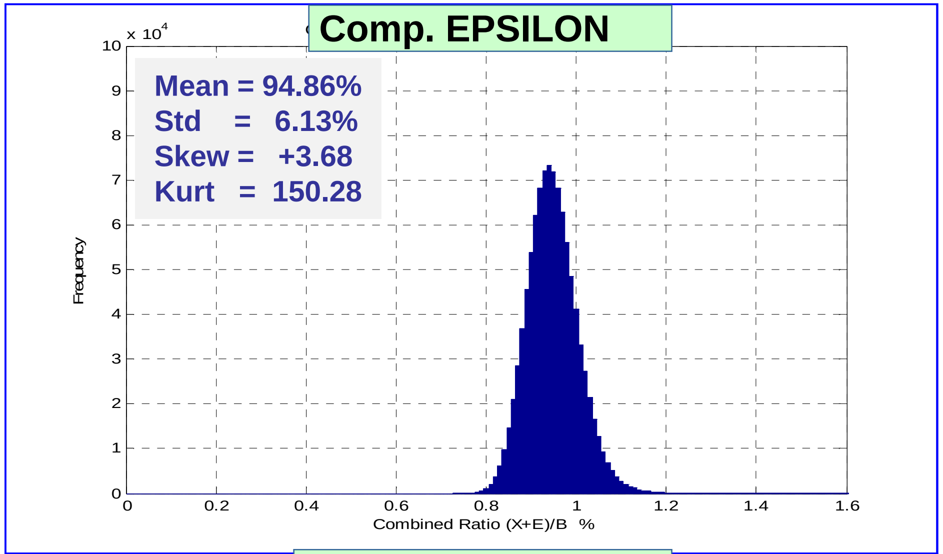
14.76 %
(no correlaz.)

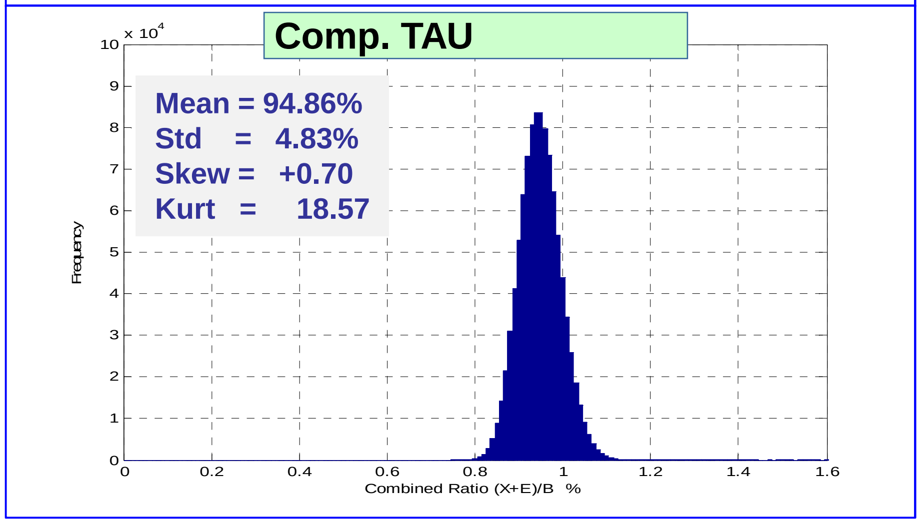
	rbc ratio		
	99%	99,50%	99,97%
NoCorr	11,21%	14,76%	51,97%
Corr QIS3	19,23%	24,73%	70,96%
Corr Input	14,72%	18,74%	56,79%
Full Corr	30,03%	38,34%	100,91%

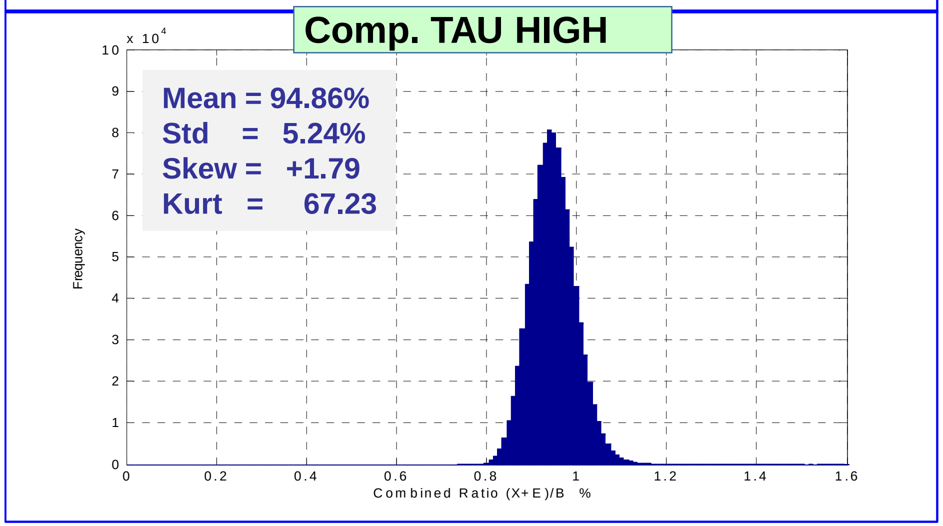
Confronto tra le distribuzioni simulate dei Combined ratios (Totale rami)

No correlazione



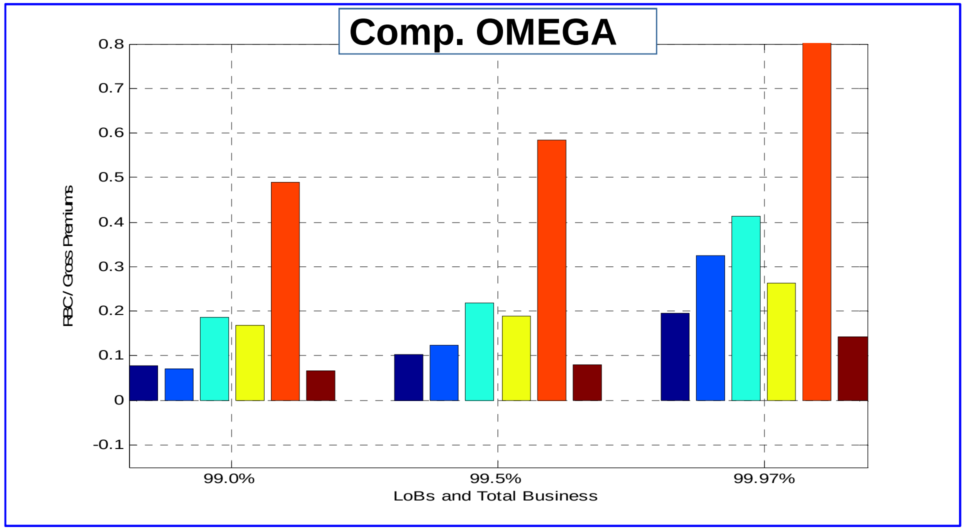


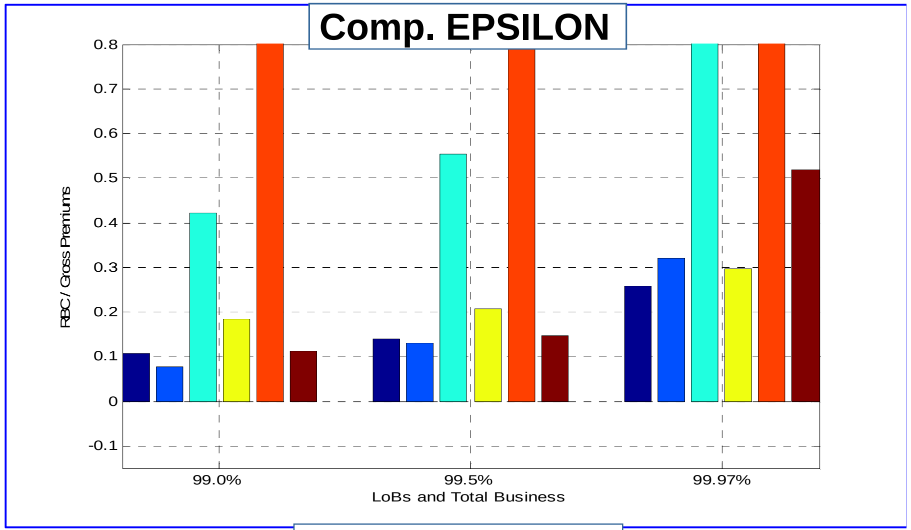


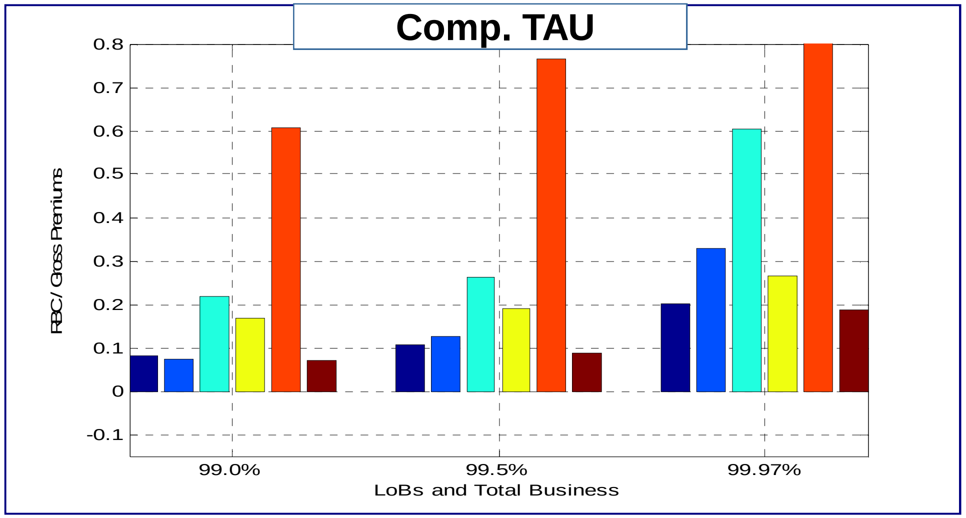


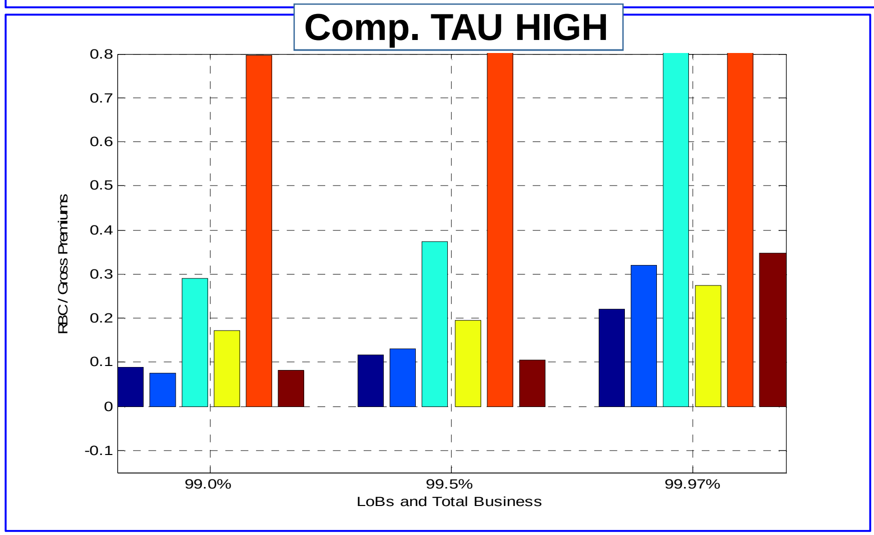
Confronto tra i RBC ratios delle 4 compagnie (mediante IM)

No correlazione









Parte III.

METODOLOGIE DI VALUTAZIONE PER IL RESERVE RISK

Market Consistent Valuation delle passività

Market Consistent Valuation

- Sia nell'ottica di introduzione dei nuovi principi contabili internazionali, IAS sia nell'ottica dell'individuazione di un requisito di solvibilità secondo i principi di Solvency II, appare necessaria una **valutazione "Market Consistent"** (c.d. *Market Consistent Valuation*) **delle riserve tecniche**.

- Tale valutazione, definita anche al "fair value", prevede la quantificazione non solo del valore puntuale della riserva tecnica ma una descrizione della variabilità della stessa ed eventualmente dell'intera distribuzione di probabilità della riserva.

- In quest'ottica assumono particolare rilevanza metodi che permettono la determinazione non solo del valore puntuale ma anche una stima della variabilità o eventualmente della distribuzione della riserva (**metodi stocastici**)

La valutazione di attività e passività

- **La Direttiva introduce una valutazione market consistent di attivi e passivi**:
  - ✓ le Attività sono valutate all'importo al quale potrebbero essere scambiate tra parti consapevoli e consenzienti in un'operazione svolta alle normali condizioni di mercato;
  - ✓ le Passività sono valutate all'importo al quale **potrebbero essere trasferite**, o regolate, tra parti consapevoli e consenzienti in un'operazione svolta alle normali condizioni di mercato.

- **L'interpretazione delle passività è legata al concetto di *current exit value*:**
  - *il valore delle riserve tecniche dovrebbe corrispondere all'ammontare che un'altra impresa di assicurazione o di riassicurazione richiederebbe per far fronte ai rischi associati a tale passività.*

Hedgeable e Non-Hedgeable

LIABILITIES

Hedgeable

Se i **futuri cash flows** associati agli impegni contrattuali **possono essere interamente replicati utilizzando strumenti finanziari, allora il valore delle riserve tecniche è ottenibile per intero ("as a whole") sulla base del valore di mercato dello strumento finanziario** (*ad es. Prodotti di ramo III senza garanzie*).

Non-Hedgeable

Per tutti i prodotti appartenenti a questa categoria (ramo I, ramo III con garanzie o con caricamenti per spese, riserve danni), **il valore delle riserve è pari a:**

Best Estimate + **Risk Margin**

"*La* ***best estimate*** corrisponde alla **media dei flussi di cassa futuri ponderata con la probabilità**, tenendo conto del valore temporale del denaro (valore attuale atteso dei flussi di cassa futuri) sulla base della **pertinente struttura per scadenza dei tassi di interesse privi di rischio."** **(*Art. 77*).**

"*Il* ***risk margin*** è **tale da garantire che il valore delle riserve tecniche sia equivalente all'importo di cui le imprese di assicurazione e di riassicurazione avrebbero bisogno per assumersi e onorare le obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione**." **(*Art. 77*).**

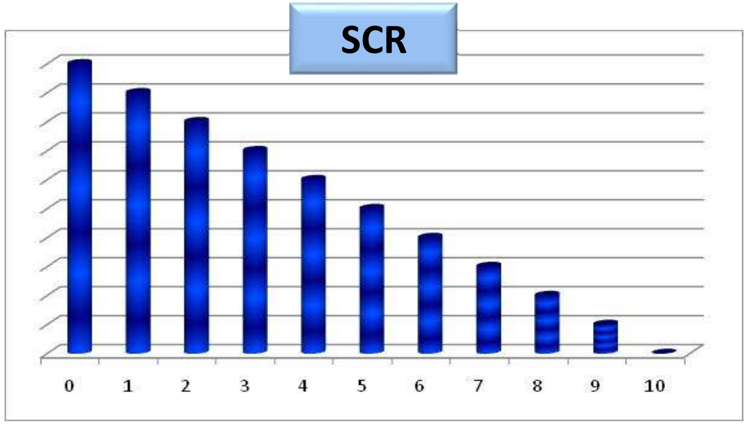
Risk Margin

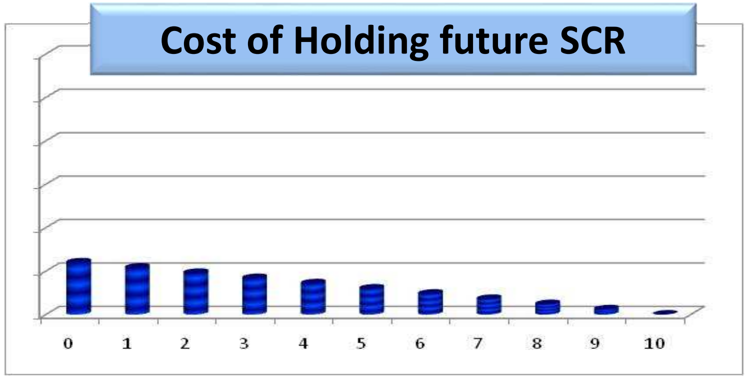
- Il **Risk Margin** (Atti Delegati) è ottenuto da:

  1. **Proiezione del SCR** fino al completo run-off delle passività complessive (*diversification assumed*). Il SCR cattura solo alcuni rischi:
     - underwriting risk (solo existing business);
     - default risk rispetto ai contratti di riassicurazione, intermediari, assicurati e altre esposizioni collegate agli impegni esistenti.
     - operational risk;
     - material market risk non materiale per le passività

  2. Determinazione del **costo del capitale** per ogni anno (6%* SCR_t);

  3. **Calcolare iI valore attuale (al tasso risk-free)** alla data di valutazione dei costi del capitale





CoC rate pari al 6% per tutte le imprese e per tutte le passività (*indipendente dal rating dell'impresa*)

RM

$$RM = \sum_{t=0}^{T} CoC \cdot v(0, t+1) \cdot SCR_t$$

La curva risk-free durante gli studi di impatto quantitativo

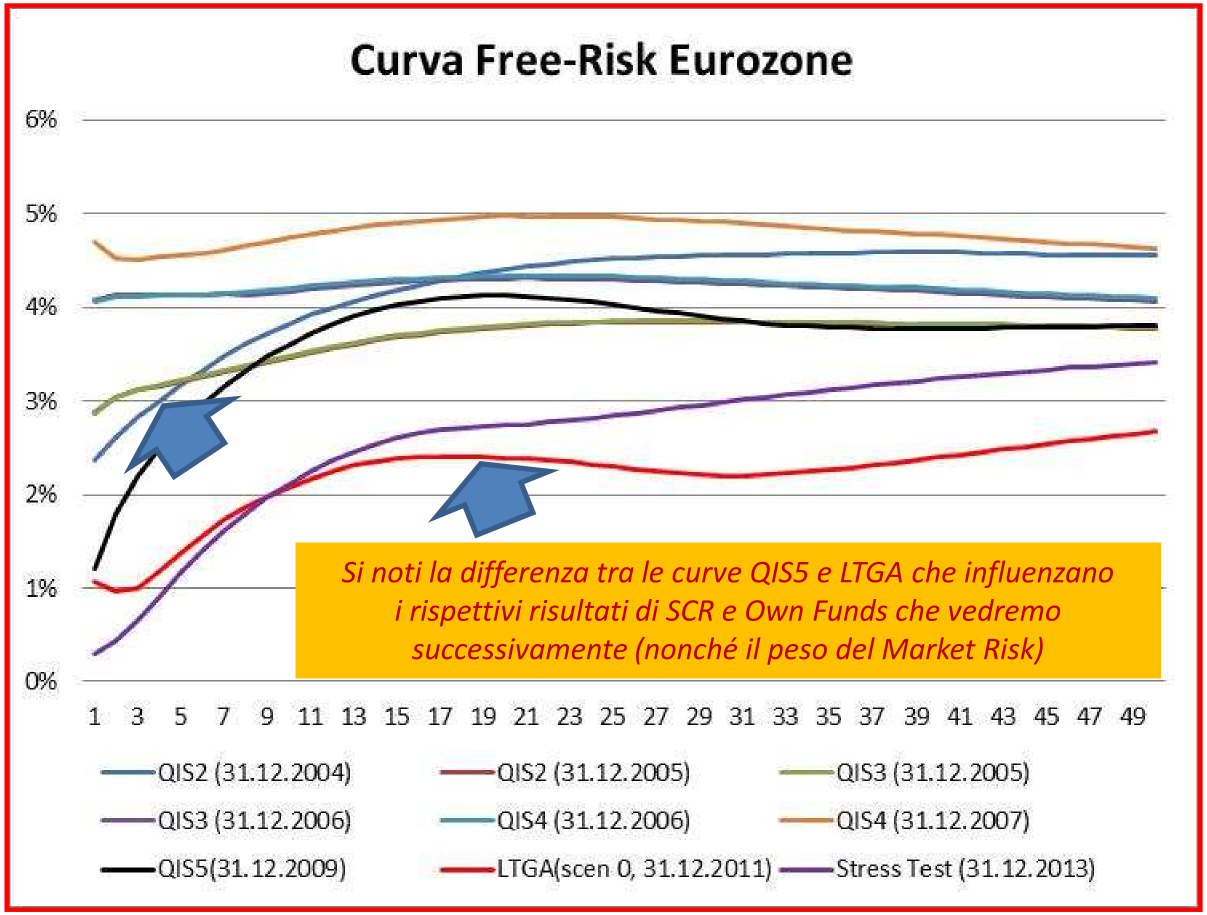
- La best estimate dovrà corrispondere alla <u>media ponderata</u> dei futuri cash-flow **tenendo conto del time value del denaro**. L' attualizzazione avviene mediante la **curva dei tassi free-risk**;

- Nel corso dei diversi studi di impatto quantitativo (QIS) sono state proposte differenti curve.

- Il grafico <u>non tiene conto</u> degli spread per considerare il liquidity/volatility adjustment.

- Per una migliore leggibilità è troncato per maturity inferiori a 50 anni ma gli studi di impatto più recenti (QIS5, LTGA e Stress Test) forniscono curve fino a circa 150 anni.

- Alcuni QIS hanno fornito sia la curva alla data di valutazione sia al 31 Dicembre dell'anno precedente.

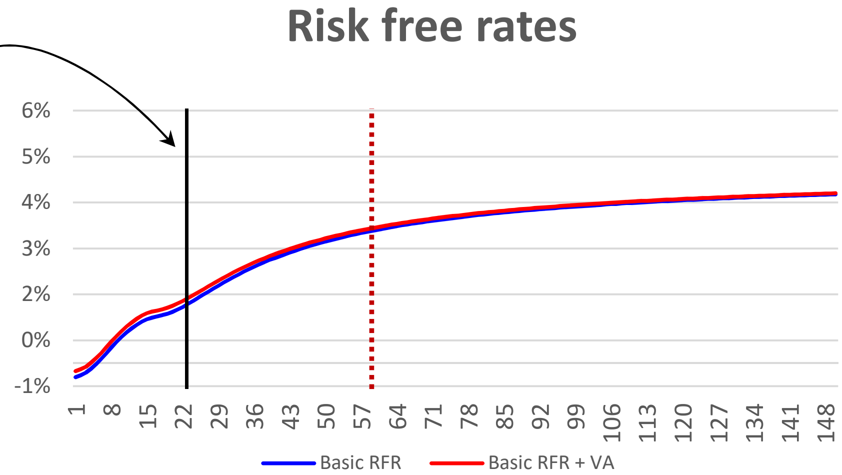


Curva dei tassi Risk-Free al 31.12.2016

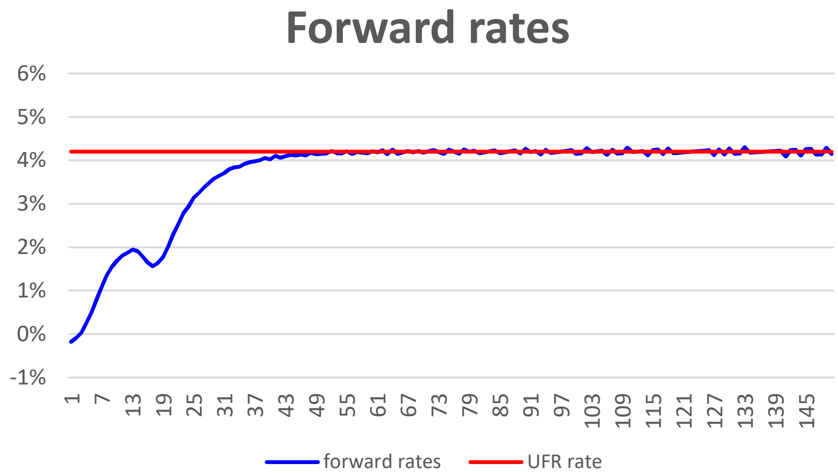
- Riportiamo l'ultima curva dei tassi risk-free e dei tassi forward calibrata al 31.12.2016 dei principali paesi UE (Austria, Francia, Germania, Italia, Olanda, Portogallo e Spagna).

La costruzione della curva per la zona Euro è ottenuta mediante la seguente procedura:

Volatility Adjustment: 13 bp until 20th year and then decreasing to zero



- Ricavare dal provider selezionato le quotazioni dei tassi Euro Swap per le differenti maturities;
- Stimare il tasso di rendimento implicito in tali strumenti finanziari fino all'epoca pari al ***Last Liquid Point*** (**LLP**) che è fissata a 20 anni per l'area Euro;
- Calcolare il **Credit Risk Adjustment** (**CRA**) sulla base dello spread tra i tassi Euro Swap e l'Overnight Index Swap (OIS) rate da sottrarre ai tassi Euro Swap fino all'epoca pari al LLP, che è fissata a 20 anni per l'area Euro. Tale aggiustamento è pari al 50% della differenza e deve essere compreso tra 10 bp e 35 bp;
- **Per le maturities superiori al LLP**, applicazione del modello di Smith-Wilson ai tassi Euro swap corretti (utilizzando l'adj CRA) al fine di ottenere la Basic risk-free interest rate term structure. Tale processo di estrapolazione è applicato fissando un orizzonte temporale (pari a 40 anni dopo il LLP per l'area Euro) che garantisca la convergenza ad un prefissato tasso **Ultimate Forward Rate (UFR)**, attualmente pari al 4.2%.



Nella curva di attualizzazione può essere considerato un volaility adjustment (fisso e ffornito dall'EIOPA) o un matching adjustment (entity specific)

Source: ***Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures*****, 28 Febbraio 2017**

Modelli stocastici per la valutazione della riserva sinistri

One-Year vs Total Run-Off

- *Total Run-Off Approach (or Ultimate View):*

$$R = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n-i+2}^{n^+} P_{i,j} \quad \Longrightarrow \quad \hat{R} = E\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n-i+2}^{n^+} P_{i,j} \middle| D_n\right] \qquad \sigma^2\left(\hat{R} \middle| D_n\right)$$

- *One-Year Approach (or One-Year View)*

$$CDR = R^{D_n} - \sum_{i=2}^{n} P_{i,n-i+2} - R^{D_{n+1}} \quad \Longrightarrow \quad E\left[CDR \middle| D_n\right] \qquad \sigma^2\left(CDR \middle| D_n\right)$$

dove

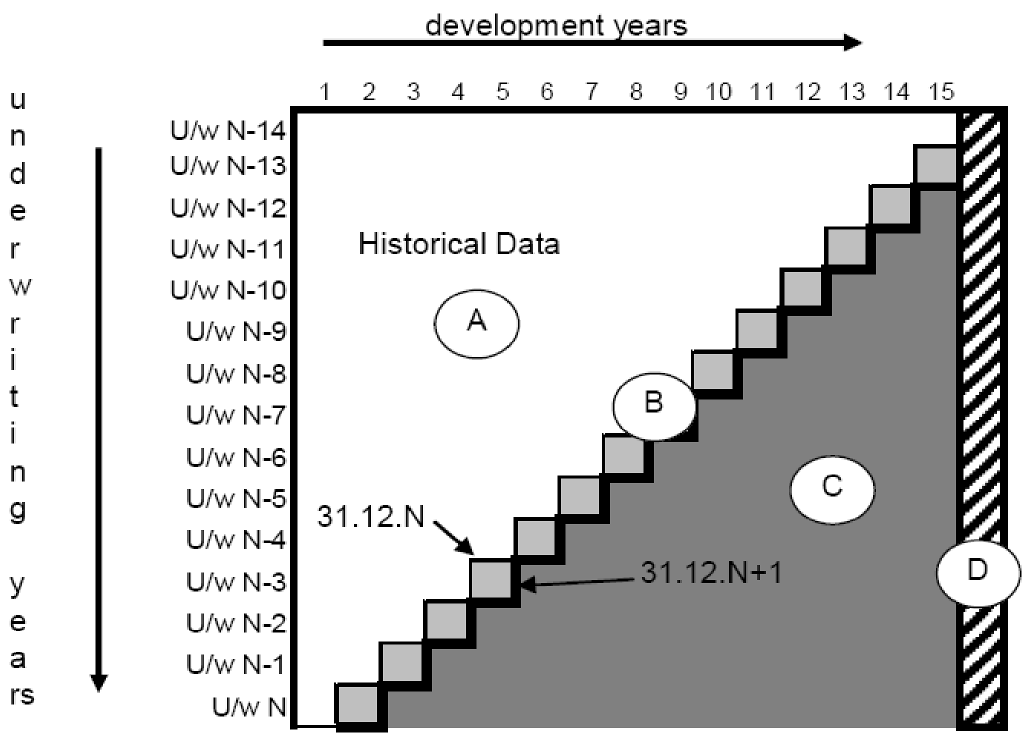
- i = anno di accadimento $i=1,2,\ldots,n$
- j = anno di generazione $j=1,2,\ldots,n,n+1$ *(N.B. In alcuni modelli stocastici si ipotizza j=1,...,n ovvero assenza di coda)*

- ***$P_{i,j}$*** = Importo Sinistri **INCREMENTALI** corrispondente all'ammontare annuo dei sinistri della generazione *i-esima* pagati nel *j-esimo* anno di sviluppo

$$D^{(n)} = \left\{ C_{i,j} = \sum_{h=1}^{j} P_{i,h} \middle| i + j \leq n+1 \right\}$$

$D^{(n)}$ stato di informazione al tempo N
(ovvero conoscenza del triangolo superiore)

One-Year view



Tratto da AISAM – ACME (2007), "Study on non-life long tail liabilities"

Area A: contiene le informazioni disponibili al momento della valutazione.

Area B: corrisponde al cosiddetto *shock period*, ovvero rappresenta i pagamenti effettuati nel corso dell'anno successivo..

Assumendo di essere in T=0, Si avrà dunque che, stimata la riserva iniziale ($R_{T=0}$), nel corso dell'anno si osserveranno due fonti di variabilità:

- i pagamenti effettuati nel corso dell'anno 1, ovvero gli elementi che stanno sulla diagonale successiva del triangolo ($X_{T=1}$);

-la nuova riserva stimata in T=1 (31.12.N+1) condizionatamente alle informazioni aggiuntive in possesso nel corso dell'anno ($R_{T=1}$).

Il reserve risk cattura le differenze tra $R_{T=0}$ e $X_{T=1}$+$R_{T=1}$

Metodi a totale Run-Off: la valutazione del “Prediction Error”

Una spiegazione dell'origine della Riserva Stocastica (Merz-Wuthrich 2008)

- Siano
  - $P_{i,j}(X_{i,j})$ **i pagamenti incrementali**
  - T l'orizzonte temporale (n.b. a partire da i,j=0)
  - $C_{i,j} = \sum_{j=0}^{T} P_{i,j}$ i pagamenti **cumulati** (osservati) *per i=0,…T*
  - $C_{i,\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j}$ i pagamenti **cumulati** ***dopo ∞ anni di sviluppo*** per i=0,…*T*
  - $R_i = C_{i,\infty} - C_{i,T-i}$ **la riserva sinistri** di origine i
  - $R = \sum R_i$ la riserva sinistri complessiva per l'anno T
  - Θ_T del ***set informativo disponibile*** al tempo T

- Essendo $C_{i,\infty} = C_{i,T-i} + R_i$ si definisca in generale $C(\infty) = C(T) + R(T)$

$E[C(\infty)|\Theta_T]$: processo martingala

- Si ipotizzi che sulla base del set informativo, Θ_T, disponibile al tempo T si abbia

$$\boxed{E[C(\infty)|\Theta_T] = C(T) + E[R(T)|\Theta_T]}$$

- **Il processo stocastico $\boldsymbol{E[C(\infty)|\Theta_T]}$ viene ipotizzato** **essere una martingala,** ovvero tale che per *s*<*T*

$$\boxed{E[C(\infty)|\Theta_T] = C(s) + E[R(s)|\Theta_s]}$$

- Questo implica che per t<u (es. per u=t+1)

$$\Rightarrow \boxed{E\{E[C(\infty)|\Theta_u] - E[C(\infty)|\Theta_t] \mid \Theta_t\} = 0}$$

Errori di previsione

- Posto $X(t,u)$ i pagamenti incrementali da t ad u ovvero
$$X(t,u) = C(u) - C(t)$$
- si ha quindi che oggetto della riserva stocastica è lo studio di

$$\begin{aligned} E[C(\infty)|\Theta_u] - E[C(\infty)|\Theta_t] &= C(u) + E[R(u)|\Theta_u] - \{C(t) + E[R(t)|\Theta_t]\} \\ &= X(t,u) + E[R(u)|\Theta_u] - E[C(u) - C(t) + R(u)|\Theta_t] \\ &= \underbrace{\boldsymbol{X(t,u) - E[X(t,u)|\Theta_t]}}_{\text{Errore di previsione dei pagamenti}} + \underbrace{\boldsymbol{E[R(u)|\Theta_u] - E[R(u)|\Theta_t]}}_{\text{Errore di previsione della stima della riserva}} \end{aligned}$$

Mean Squared Error of Prediction

In generale si è interessati all'errore quadratico medio di previsione. Si indichino

$$\hat{X} = E[C(\infty)|\Theta_u] \quad \text{e} \quad X = E[C(\infty)|\Theta_t]$$

Sia

$$MSEP_{X|\Theta}(\hat{X}) = E\left[\left(\hat{X} - X\right)^2 \middle| \Theta\right] = Var(X|\Theta) + \left(\hat{X} - E[X|\Theta]\right)^2$$

Hp. : si supponga che X **non dipenda** da Θ e che la successione $X_1,...X_n$ sia i.i.d. con media e varianza finita. Allora l'MSEP non-condizionato sarà

$$MSEP_X\left(\hat{X}\right) = E\left[MSEP_{X|\Theta}\left(\hat{X}\right)\right] = Var(X) + E\left[\left(\hat{X} - E[X]\right)^2\right] = Var(X) + Var\left(\hat{X}\right)$$

Es. Per esempio se uso lo stimatore varianza campionaria $\bar{X}$ per "prevedere" X si ha

$$MSEP_X(\bar{X}) = Var(X) + E[(\bar{X} - E[X])^2] = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n}$$

Hp. : si supponga che X **dipenda** da Θ (quindi si assume che la successione sia dipendente nel tempo; es. si veda la stima concatenata dei fattori del metodo CL). Allora

$$MSEP_X(\hat{X}) = E\left[MSEP_{X|\Theta}(\hat{X})\right] = E[Var(X|\Theta)] + E\left[\left(\hat{X} - E[X|\Theta]\right)^2\right]$$

$$= Var(X) - Var(E[X|\Theta]) + E\left[\left(\hat{X} - E[X|\Theta]\right)^2\right]$$

$$= Var(X) - Var(E[X|\Theta]) + E\left[\left(\hat{X} - E(X) + E(X) - E[X|\Theta]\right)^2\right]$$

$$= Var(X) + E\left[\left(\hat{X} - E(X)\right)^2\right] - 2E\left[\left(\hat{X} - E(X)\right)\left(E[X|\Theta] - E(X)\right)\right]$$

$$= Var(X) + Var\left(\hat{X}\right) - 2Cov\left(\hat{X}, E[X|\Theta]\right)$$

se $\hat{X}$ è stimatore non distorto di $E[X]$.

Poiché per motivi di semplicità si è soliti ipotizzare nulla la covarianza, si ottiene in genere una sovrastima del vero MSEP. In generale, si può dire che l'MSEP è dato dalla somma di

$Var(X) \Rightarrow$ varianza (errore) di processo (PV)

$E\left[\left(\hat{X} - E[X]\right)^2\right] \Rightarrow$ varianza (errore) di stima o di previsione (EV)

Esempio: il modello di Mack

Al fine di ottenere una stima delle componenti dell'MSEP è necessario introdurre alcune ipotesi sulla struttura stocastica del triangolo di run-off

- $C_{i,j}$ indipendenti per i
- $C_{i,j}$ per i=0… formano una catena di Markov e esistono i fattori $m_0,\dots,m_j,\dots,m_{T-1}$ >0 e $\sigma_0,\dots,\sigma_{T-1}$ >0 tali che per $0 \le i \le T$ e $1 \le j \le T$
    - $E[C_{i,j} \mid C_{i,j-1}] = m_{j-1} C_{i,j-1}$
    - $Var(C_{i,j} \mid C_{i,j-1}) = \sigma_{j-1}^2 C_{i,j-1}$

Si dimostra che

- $\widehat{m}_j$ coincidono con le stime CL
- $\widehat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{T-j-1} \sum_{i=0}^{T-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{m}_j \right)^2$ per j<T−1
- $\widehat{\sigma}_{T-1}^2 = \min \left\{ \frac{\widehat{\sigma}_{T-2}^4}{\widehat{\sigma}_{T-3}^2}, \widehat{\sigma}_{T-3}^2, \widehat{\sigma}_{T-2}^2 \right\}$ per j=T−1
- $\widehat{m}_0, \dots, \widehat{m}_{T-1}$ sono incorrelati
- $Var(\widehat{m}_j \mid \Theta_j) = \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=0}^{T-j-1} C_{i,j}}$

Il modello di Mack e la regressione

Dalle assunzioni

- $E[C_{i,j} \mid C_{i,j-1}] = m_{j-1} C_{i,j-1}$
- $Var(C_{i,j} \mid C_{i,j-1}) = \sigma^2_{j-1} C_{i,j-1}$

si ricava in modo equivalente la struttura del processo autoregressivo, $C_{i,j+1} = m_j C_{i,j} + \sigma_j \sqrt{C_{i,j}}\, \varepsilon_{i,j+1}$. Si ha quindi modo di giustificare la stima m_j come calcolo del parametro di un

modello di regressione eteroschedastico vincolato a passare per l'origine.

Si può infatti pensare al fattore m_j come soluzione del problema

$$min\left\{\sum_{i=1}^{T-j} \frac{1}{C_{i,j}} \left(C_{i,j+1} - m_j C_{i,j}\right)^2\right\}$$

N.B. La soluzione restituisce la stima dei coefficienti del CL ed inoltre si può ricavare anche la stima σ_j^2 di Mack usando i residui pesati. Infatti

$$\epsilon_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \widehat{m}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$$

da cui

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} \left(\frac{C_{i,j+1} - \widehat{m}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{m}_j\right)^2 C_{i,j}$$

Che coincide con lo stimatore di Mack.

La formula di Mack

Distribution-free calculation
of the standard error of chain-ladder reserve estimates, T. Mack.
(Astin Bullettin, 23(2) - 1993)

Il Prediction Error per la Riserva Sinistri della singola generazione

- Per la Riserva Sinistri di ogni singolo anno di generazione, Mack ha individuato la seguente **approssimazione**:

PV = Process Variance:

$$VAR[R_i] \approx \hat{C}_{i,n}^2 \cdot \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2 \cdot \hat{C}_{i,j}}$$

EV = Estimation Variance:

$$VAR[\hat{R}_i] \approx \hat{C}_{i,n}^2 \cdot \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2 \cdot \sum_{h=1}^{n-j} C_{h,j}}$$

da cui ricaviamo:

PRV = Prediction Variance = PV + EV =

$$PRV[\hat{R}_i] \approx VAR[R_i] + VAR[\hat{R}_i] \approx \hat{C}_{i,n}^2 \cdot \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{h=1}^{n-j} C_{h,j}} \right)$$

il **Prediction Error della Riserva Sinistri nel suo complesso**, è ottenuto sulla base della radice quadrata della seguente espressione che individua la PRV (prediction variance):

$$PRV\left[\sum_{i=2}^{n}\hat{R}_i\right] \approx \sum_{i=2}^{n}\left[PRV\left[\hat{R}_i\right] + 2\cdot\hat{C}_{i,n}\cdot\left(\sum_{h=i+1}^{n}\hat{C}_{h,n}\right)\cdot\sum_{j=n-i+1}^{n-1}\frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2\cdot\sum_{h=1}^{n-j}C_{h,j}}\right]$$

Triangolo Taylor-Ashe (1993) – Pagamenti Incrementali

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	357,848	766,940	610,542	482,940	527,326	574,398	146,342	139,950	227,229	67,948
2	352,118	884,021	933,894	1,183,289	445,745	320,996	527,804	266,172	425,046	
3	290,507	1,001,799	926,219	1,016,654	750,816	146,923	495,992	280,405		
4	310,608	1,108,250	776,189	1,562,400	272,482	352,053	206,286			
5	443,160	693,190	991,983	769,488	504,851	470,639				
6	396,132	937,085	847,498	805,037	705,960					
7	440,832	847,631	1,131,398	1,063,269						
8	359,480	1,061,648	1,443,370							
9	376,686	986,608								
10	344,014									

Triangolo tratto da: TAYLOR, G. C and ASHE, F R. (1983) Second Moments of Estimates of Outstanding Claims. Journal of Econometrics 23, 37-61. Utilizzato in numerosi articoli in ambito attuariale
Disponibile in R. Library(ChainLadder)

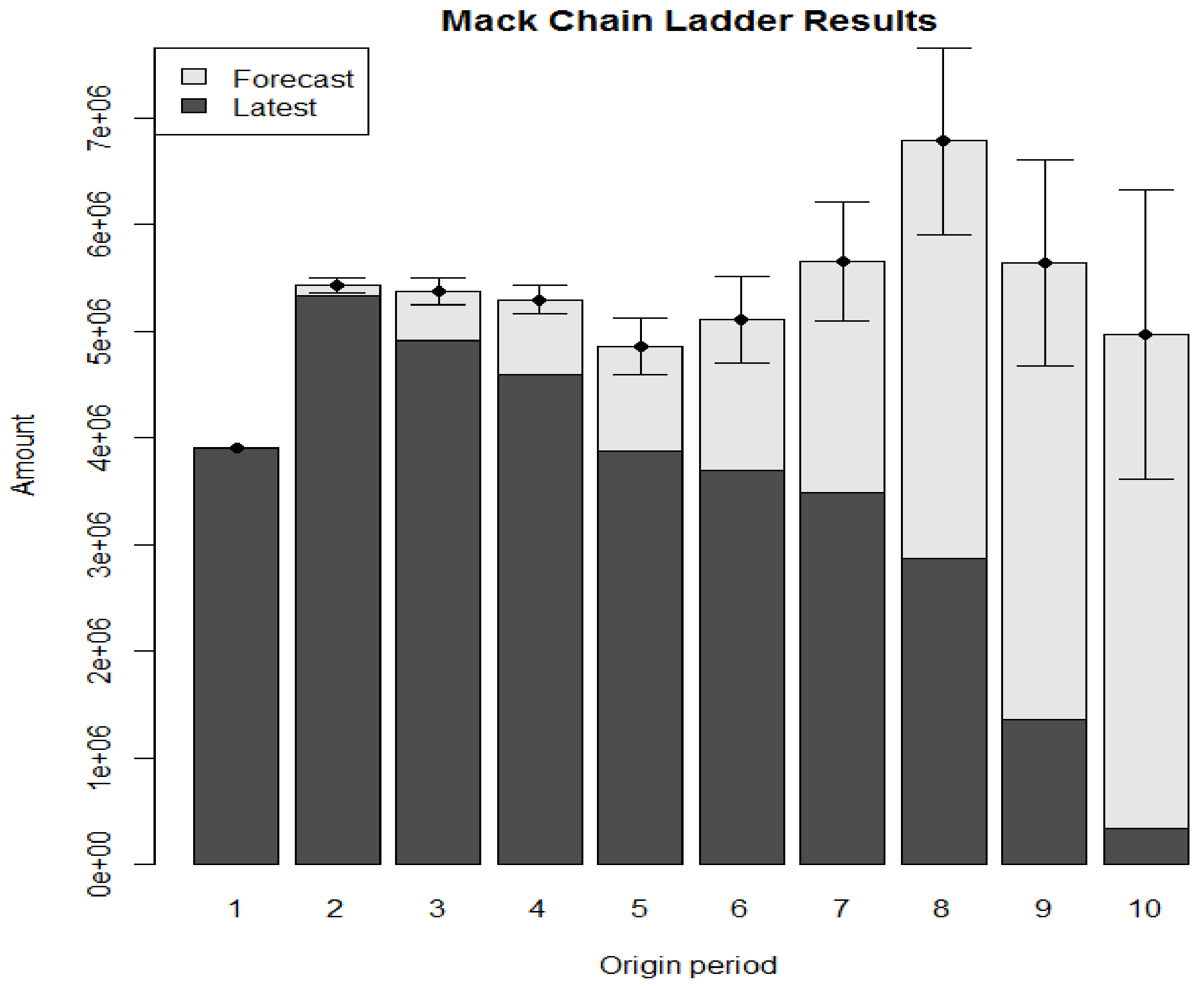
Pagamenti Cumulati C_{ij}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	357,848	1,124,788	1,735,330	2,218,270	2,745,596	3,319,994	3,466,336	3,606,286	3,833,515	3,901,463
2	352,118	1,236,139	2,170,033	3,353,322	3,799,067	4,120,063	4,647,867	4,914,039	5,339,085	
3	290,507	1,292,306	2,218,525	3,235,179	3,985,995	4,132,918	4,628,910	4,909,315		
4	310,608	1,418,858	2,195,047	3,757,447	4,029,929	4,381,982	4,588,268			
5	443,160	1,136,350	2,128,333	2,897,821	3,402,672	3,873,311				
6	396,132	1,333,217	2,180,715	2,985,752	3,691,712					
7	440,832	1,288,463	2,419,861	3,483,130						
8	359,480	1,421,128	2,864,498							
9	376,686	1,363,294								
10	344,014									

Development Factors ($f_{i,j} = C_{i,j+1} / C_{i,j}$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3.1432	1.5428	1.2783	1.2377	1.2092	1.0441	1.0404	1.0630	1.0177	
2	3.5106	1.7555	1.5453	1.1329	1.0845	1.1281	1.0573	1.0865		
3	4.4485	1.7167	1.4583	1.2321	1.0369	1.1200	1.0606			
4	4.5680	1.5471	1.7118	1.0725	1.0874	1.0471				
5	2.5642	1.8730	1.3615	1.1742	1.1383					
6	3.3656	1.6357	1.3692	1.2364						
7	2.9228	1.8781	1.4394							
8	3.9533	2.0157								
9	3.6192									
10										

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ_j	3.491	1.747	1.457	1.174	1.104	1.086	1.054	1.077	1.018
σ^2_j	160,280.33	37,736.86	41,965.21	15,182.90	13,731.32	8,185.77	446.62	1,147.37	446.62

Accident Year	Latest Cum.	CDF	Ultimate	Claims Reserve	Process Error	Estimation Error	Prediction Error	CV	Process Var /Pred. Var
1	3.901.463	1,0000	3.901.463	0	0	0	0	-	
2	5.339.085	0,9826	5.433.719	94.634	48.832	57.628	75.535	79,82%	41,79%
3	4.909.315	0,9127	5.378.826	469.511	90.524	81.338	121.699	25,92%	55,33%
4	4.588.268	0,8661	5.297.906	709.638	102.622	85.464	133.549	18,82%	59,05%
5	3.873.311	0,7973	4.858.200	984.889	227.880	128.078	261.406	26,54%	75,99%
6	3.691.712	0,7223	5.111.171	1.419.459	366.582	185.867	411.010	28,96%	79,55%
7	3.483.130	0,6153	5.660.771	2.177.641	500.202	248.023	558.317	25,64%	80,27%
8	2.864.498	0,4222	6.784.799	3.920.301	785.741	385.759	875.328	22,33%	80,58%
9	1.363.294	0,2416	5.642.266	4.278.972	895.570	375.893	971.258	22,70%	85,02%
10	344.014	0,0692	4.969.825	4.625.811	1.284.882	455.270	1.363.155	29,47%	88,85%
Totals	**34.358.090**	**0,6478**	**53.038.946**	**18.680.856**	**1.878.292**	**1.568.532**	**2.447.095**	**13,10%**	**58,91%**

Indipendenza	2.038.397	0,1091
Piena correlazione tra EV	2.746.137	0,1470
Piena correlazione tra EV e PV	4.771.256	0,2554


Mack Chain Ladder Results
Forecast
Latest
Amount
0e+00
1e+06
2e+06
3e+06
4e+06
5e+06
6e+06
7e+06
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Origin period

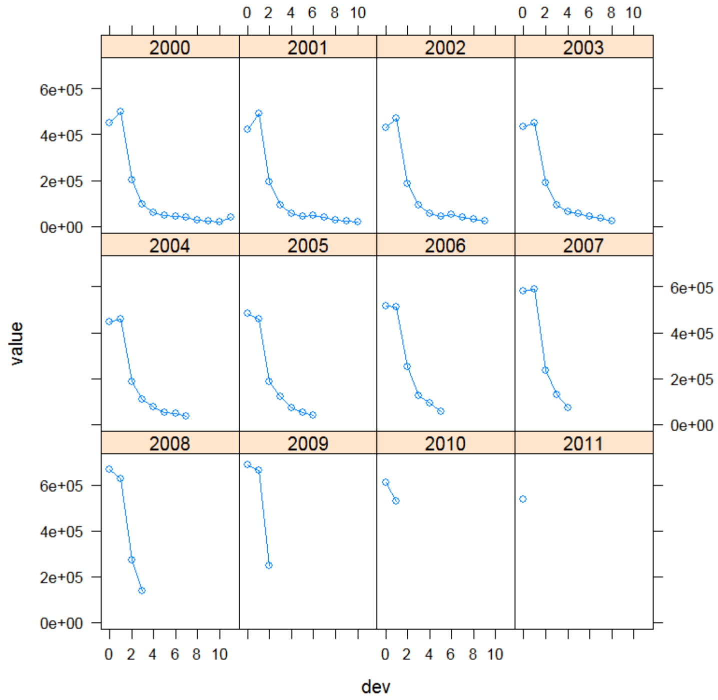
La libreria *ChainLadder* di R

Il calcolo dei parametri di cui sopra può essere ottenuto in diversi modi. Tra gli strumenti più flessibili rientra certamente l'uso di un foglio elettronico (vedi file Excel) .
A questo si aggiunge anche la possibilità di sfruttare librerie freeware in R tra cui

library ***ChainLadder***

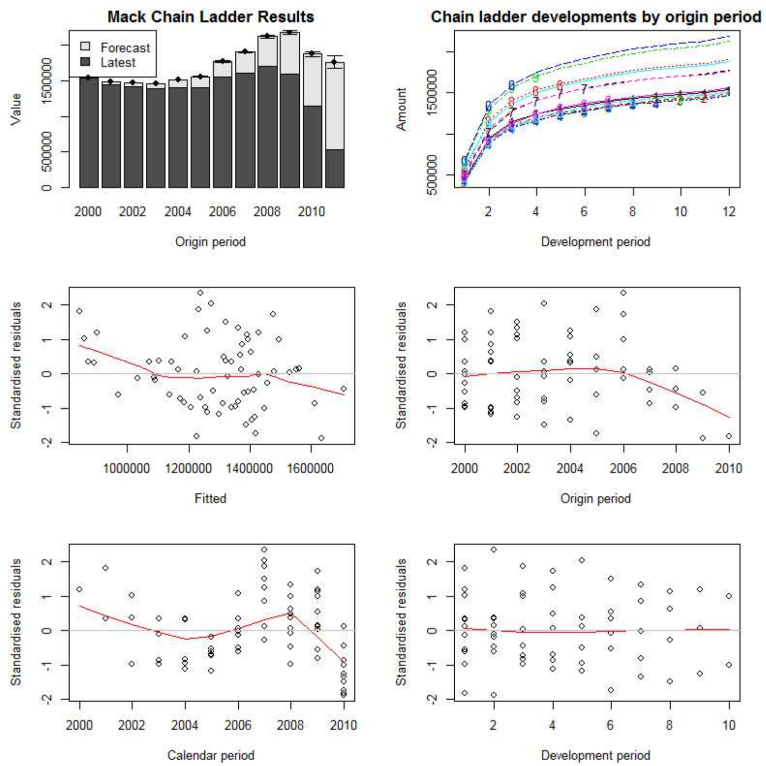
R- lab

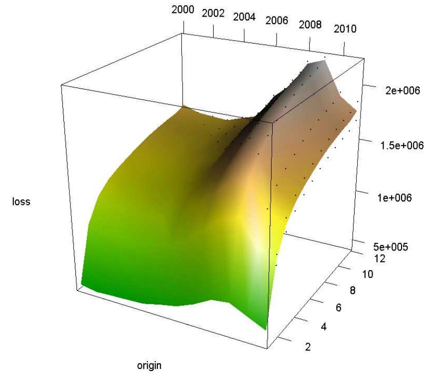
```
library(ChainLadder)

PAID_UGF <- read.csv(file="A1+A2-A3+A4 con coda.csv", sep=";", dec=".", header=T)
names(PAID_UGF) <- c("origin","dev","paid")

head(PAID_UGF)

#li trasformo in un triangolo di run-off
PAID_UGF <- as.triangle(PAID_UGF, origin="origin", dev="dev", "paid")
PAID_UGF
plot(PAID_UGF, lattice=TRUE)

#li trasformo in pagamenti cumulati
CUM_UGF <- incr2cum(PAID_UGF)

# ata : age to age factors - individual factors
ata(CUM_UGF)

# N.B. stima parametri con approccio regressione
 x <- CUM_UGF[,1]
 y <- CUM_UGF[,2]
summary( lm(y ~ x + 0, weights=1/x) )
```



R- lab

```
#ChainLadder classico
CL_UGF <- chainladder(CUM_UGF)
summary(CL_UGF)
predict(CL_UGF)
plot(predict(CL_UGF), lattice=TRUE)
plot(cum2incr(predict(CL_UGF)), lattice=TRUE)

# Mack approach
UGF_Mack <- MackChainLadder(CUM_UGF,
est.sigma="Mack")
summary(UGF_Mack)
UGF_Mack$coefficients
str(UGF_Mack)

# N.B. stima parametri con approccio regressione
 x <- CUM_UGF[,1]
 y <- CUM_UGF[,2]
 summary(lm(y ~ x + 0, weights=1/x))$sigma
 UGF_Mack$sigma[1]
```





The Over-dispersed Poisson-Model

Standard Errors of Prediction in Claims Reserving: a comparison of methods, P. England, R. Verrall (1998)

I Modelli Lineari Generalizzati

GLM e la riserva sinistri

- struttura stocastica $P_{i,j} \sim EF\left\{b(\theta_{i,j}), a\left(\phi_{i,j}\right)\right\}$ con $\mu_{i,j} = b'\left(\theta_{i,j}\right)$
- legame $g(\mu_{i,j}) = \eta_{i,j}$
- predittore lineare $\eta_{i,j} = \boldsymbol{x}'_{i,j}\boldsymbol{\beta}$

Note

- La stima dei parametri β avviene con la massima log-verosimiglianza
- In genere si assume le osservazioni siano determinazioni i.i.d.
- il parametro di sovradispersione viene stimato con $\hat{\phi} = \frac{1}{n-p}\sum\frac{\omega_i\left(y_i-\hat{\mu}_i\right)^2}{V(\hat{\mu}_i)}$

stante la relazione $Var(P) = V(\mu)a(\phi)$

Nell'ambito della riserva stocastica tipicamente

- predittore lineare $\eta_{i,j} = c + a_i + b_j$
- legame $\ln\left(\mu_{i,j}\right) = \eta_{i,j}$

Il modello fattoriale e l'ipotesi poissoniana

Si considerino i parametri $\mu_0,\dots\mu_T > 0$ e $\gamma_0,\dots\gamma_T > 0$. Si assuma che $P_{i,j} = \mu_i \gamma_j$ e che $P_{i,j} \sim \wp(\mu_i \gamma_j)$ $\forall$i,j dove

μ_i : valore atteso dei pagamenti per anno di generazione

γ_j : tasso di liquidazione per anno di sviluppo. In particolare si ha

$$\frac{E[P_{i,j}]}{E[P_{i,j-1}]} = \frac{\gamma_j}{\gamma_{j-1}}$$

Per garantire l'identificabilità posto $\sum_{j=0}^{T} \gamma_j = 1$ si deduce che

$E[P_{i,j}] = \mu_i \cdot \gamma_j = P_{i,j}$ Var($P_{i,j}$)= $\mu_i \cdot \gamma_j = P_{i,j}$

$E[C_{i,j}] = \mu_i \sum_{h=0}^{j} \gamma_h$

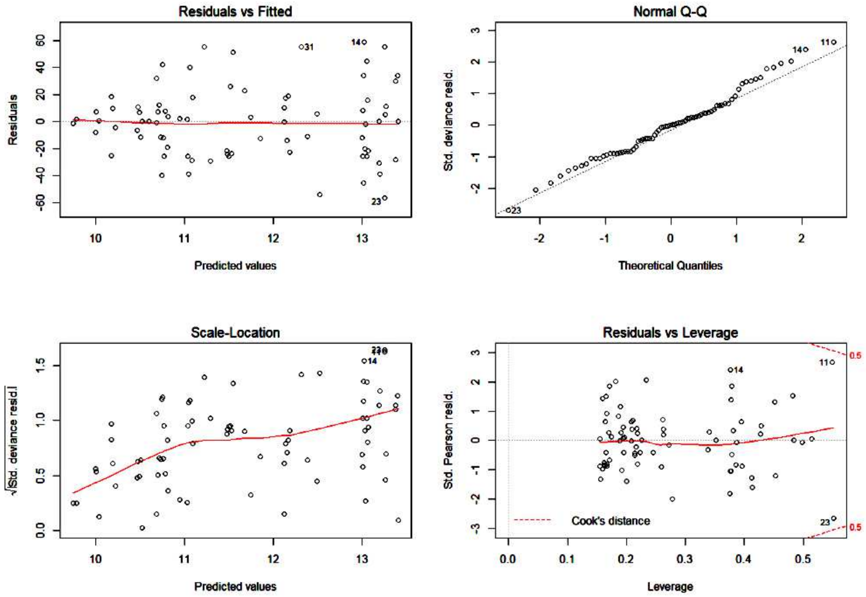
$E[C_{i,T}] = \mu_i$

Stante l'assunzione parametrica, i parametri μ_i e γ_j possono essere stimati con la massima verosimiglianza

$$L(\mu_0, \dots, \mu_T; \gamma_0, \dots, \gamma_T | \Theta) = \prod_{i+j \le T} \left(\frac{\exp\left(-\mu_i \gamma_j\right) \left(\mu_i \gamma_j\right)^{P_{i,j}}}{P_{i,j}\,!} \right)$$

R-Lab

```
#stima del parametro di sovradispersione
Over_disp <- sum(residuals(CL, type="pearson")^2)/CL$df.res
print(Over_disp)
summary(CL, dispersion=Over_disp)

#valori interpolati su scala della funzione link: es. log(Y)
predict(CL, type="link")
#valori interpolati su scala della variabile dipendente: es Y
predict(CL, type="response")
#contributo al predittore su scala link delle variabili esplicative
predict(CL, type="terms")

CL <- glm(Y~rig+col, family=quasipoisson)

summary(CL)

par(mfrow=c(2,2))
plot(CL)
```




```
# la previsione dei pagamenti nel triangolo inferiore è
mu.hat1 <- exp(predict(CL,newdata=data.frame(rig,col)))*futuro
cat("Total reserve =", sum(mu.hat1))
mu.hat2 = predict(CL,newdata=data.frame(rig,col),type="response")*futuro
cat("Total reserve =", sum(mu.hat2))
```

MSEP di un GLM (1) (v. Charpentier, 2010)

Come già descritto in precedenza è rilevante calcolare

$$MSEP_{C_{i,T}|\Theta_T}\left(\sum_{i=1}^{T}\hat{C}_{i,T}^{GLM}\right)=E\left[\left(\sum_{i=1}^{T}\hat{C}_{i,T}^{GLM}-\sum_{i=1}^{T}C_{i,T}\right)^2\middle|\Theta_T\right]$$

e scomporlo nelle componenti di errore di processo ed errore di previsione. Con riferimento alla generazione *i*-esima, $\hat{C}_{i,T}^{GLM}=\sum_{j\leq T-i+1}P_{i,j}+\sum_{j>T-i+1}\hat{P}_{i,T}^{GLM}$ dove il primo addendo sono quantità note così come, condizionatamente al set informativo Θ_T ovvero *dato* il modello di previsione GLM, anche $\sum_{j>T-i+1}\hat{P}_{i,T}^{GLM}$ sono da leggersi come *stime* (non *stimatori*). Stesso discorso vale per $C_{i,T}$, dove però il secondo addendo contiene i pagamenti incrementali ignoti e *sono* variabili casuali. Quindi

$$MSEP_{C_{i,T}|\Theta_T}\left(\sum_{i=1}^{T}\hat{C}_{i,T}^{GLM}\right)=E\left[\left(\sum_{i+j>T}\hat{P}_{i,j}^{GLM}-\sum_{i+j>T}P_{i,j}\right)^2\middle|\Theta_T\right]=$$

$$=E\left[\left(\sum_{i+j>T}\hat{P}_{i,j}^{GLM}-\sum_{i+j>T}E(P_{i,j})+\sum_{i+j>T}E(P_{i,j})-\sum_{i+j>T}P_{i,j}\right)^2\middle|\Theta_T\right]$$

da cui si ha

$$MSEP_{C_{i,T}|\Theta_T}\left(\sum_{i=1}^{T}\hat{C}_{i,T}^{GLM}\right)=Var\left(\sum_{i+j>T}P_{i,j}\right)+\left(\sum_{i+j>T}\left(\hat{P}_{i,j}^{GLM}-E\left[P_{i,j}\right]\right)\right)^2$$

dove il doppio prodotto si annulla mentre il secondo addendo non è pari a zero essendo la stima $\hat{P}_{i,j}^{GLM}$ non necessariamente pari a $E\left[P_{i,j}\right]$. Ma per l'asserita indipendenza tra i $P_{i,j}$ e stante la relazione tra varianza e funzione varianza in un GLM si ottiene

$$=\sum_{i+j>T}Var\left(P_{i,j}\right)+\left(\sum_{i+j>T}\left(\hat{P}_{i,j}^{GLM}-E\left[P_{i,j}\right]\right)\right)^2=\sum_{i+j>T}\frac{\phi}{\omega}V\left(P_{i,j}\right)+\left(\sum_{i+j>T}\left(\hat{P}_{i,j}^{GLM}-E\left[P_{i,j}\right]\right)\right)^2$$

MSEP di un GLM (2)

La difficoltà sta nello stimare la II componente. Si cerchi quindi l'unconditional MSEP, ovvero lo si studi al variare di tutti i possibili set informativi che hanno dato luogo al triangolo e quindi al variare di tutte le possibili stime ottenibili con il modello GLM. Quindi $\hat{P}_{i,j}^{GLM}$ assumerà l'accezione di variabile casuale. Si ha quindi

$$E\left[MSEP_{C_{i,T}|\Theta_T}\left(\sum_{i=1}^{T}\hat{C}_{i,T}^{GLM}\right)\right] = \sum_{i+j>T}\frac{\phi}{\omega}V(P_{i,j}) + E\left[\left(\sum_{i+j>T}(\hat{P}_{i,j}^{GLM} - E[P_{i,j}])\right)^2\right]$$

Ma

$$E\left[\left(\sum_{i+j>T}(\hat{P}_{i,j}^{GLM} - E[P_{i,j}])\right)^2\right] =$$

$$= E\left[\sum_{i+j>T}(\hat{P}_{i,j}^{GLM} - E[P_{i,j}])^2 + \sum_{i+j>T,m+n>T,i+j\neq m+n}(\hat{P}_{i,j}^{GLM} - E[P_{i,j}])(\hat{P}_{m,n}^{GLM} - E[P_{m,n}])\right]$$

$$= \sum_{i+j>T}\mathrm{Var}(\hat{P}_{i,j}^{GLM}) + \sum_{i+j>T,m+n>T,i+j\neq m+n}\mathrm{Cov}(\hat{P}_{i,j}^{GLM}, \hat{P}_{m,n}^{GLM})$$

MSEP di un GLM (3)

Usando il metodo delta, secondo cui sviluppando $g(X)$ in serie di Taylor nell'intorno di $x=\mu$ si ha

$$g(X) = g(\mu) + (X-\mu)g'(\mu) + r$$

Considerando trascurabile i termini di ordine superiore al I si ha:

$$Var[g(X)] \cong [g'(\mu)]^2 Var(X)$$

assumendo la presenza di un legame logaritmico e quindi della relazione $\hat{P}_{i,j}^{GLM} = \exp(\hat{\eta}_{i,j})$ si ottiene

$$\mathrm{Var}(\hat{P}_{i,j}^{GLM}) = \mathrm{Var}(\exp(\hat{\eta}_{i,j})) \cong \left(\frac{\partial \exp(\hat{\eta}_{i,j})}{\partial \hat{\eta}_{i,j}}\right)^2 Var(\hat{\eta}_{i,j}) = \hat{P}_{i,j}^{GLM^2} Var(\hat{\eta}_{i,j})$$

Con logica analoga si ottiene

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\hat{P}_{i,j}^{GLM}, \hat{P}_{m,n}^{GLM}) &= \mathrm{Cov}(\exp(\hat{\eta}_{i,j}), \exp(\hat{\eta}_{m,n})) \\ &\cong \mathrm{Cov}\left(\frac{\partial \exp(\hat{\eta}_{i,j})}{\partial \hat{\eta}_{i,j}}\left(\hat{\eta}_{i,j} - E(\hat{\eta}_{i,j})\right), \frac{\partial \exp(\hat{\eta}_{m,n})}{\partial \hat{\eta}_{m,n}}\left(\hat{\eta}_{m,n} - E(\hat{\eta}_{m,n})\right)\right) \\ &= \hat{P}_{i,j}^{GLM} \hat{P}_{m,n}^{GLM} \mathrm{Cov}(\hat{\eta}_{i,j}, \hat{\eta}_{m,n})\end{aligned}$$

MSEP di un GLM (4)

Poiché in generale la matrice di varianze covarianze del vettore dei predittori è

$$\mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\eta}}) = \mathrm{Var}\left(\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \boldsymbol{X}\mathrm{Var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)\boldsymbol{X}'$$

dove la matrice di varianze covarianze coincide con la matrice di informazione di Fisher, ovvero

$$\mathrm{Var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \left(\boldsymbol{X}'\widetilde{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{X}\right)^{-\mathbf{1}}$$

con $\widetilde{\boldsymbol{W}}$ matrice diagonale con elementi dati da $\frac{1}{\frac{\phi}{\omega}V\left(P_{i,j}\right)}\left(\frac{\partial \exp\left(\widehat{\eta}_{i,j}\right)}{\partial \widehat{\eta}_{i,j}}\right)^2$

in definitiva, sostituendo agli elementi incogniti le corrispondenti stime si ha

$$E\left[\widehat{MSEP}_{C_{i,T}|\Theta_T}\left(\sum_{i=1}^{T}\hat{C}_{i,T}^{GLM}\right)\right] = \sum_{i+j>T}\frac{\hat{\phi}}{\omega}V\left(\hat{P}_{i,j}\right) + \widehat{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{XVar}\left(\widehat{\beta}\right)\boldsymbol{X}'\widehat{\boldsymbol{P}}\Big|_{i+j>T}$$

Nel caso di un modello Poisson sovradisperso con legame canonico

$V\left(\hat{P}_{i,j}\right) = \hat{P}_{i,j}$ e gli elementi di $\widetilde{\boldsymbol{W}}$ sono $\frac{\omega}{\hat{\phi}}\hat{P}_{i,j}^2$.

R-lab

```
#MSEP per poisson

Y2 <- Y;
CL2 <- glm(Y~rig+col, family=quasipoisson)
p <- 2*anno-1;
phi.P <- sum(residuals(CL2,"pearson")^2)/(np-p)
Sig <- vcov(CL2)
X <- model.matrix(~rig+col)
Cov.eta <- X%*%Sig%*%t(X)
mu.hat <- exp(X %*% coefficients(CL2))*futuro
pe2 <- phi.P * sum(mu.hat) + t((mu.hat)) %*% (Cov.eta)
%*% (mu.hat)
cat("Total reserve =", sum(mu.hat), "mse =", sqrt(pe2),"\n")
```

La distribuzione della riserva

Il calcolo del prediction error sebbene utile per avere una buona sensitivity sull'accuratezza della stima non dà ancora risposta al come trovare la **distribuzione della riserva**.

Trovarla è complesso in quanto è la risultante di somme di v.c. dipendenti per origine e dipendenti a loro volta dagli stimatori dei parametri che restituiscono le stime puntuali di cella.

Una soluzione è, dato il modello predittivo e la stima della matrice di varianze covarianze degli stimatori dei parametri, simulare dalla distribuzione congiunta dei parametri e per ogni replicazione stimare il triangolo inferiore. Al fine di includere anche il prediction error si tratta poi di simulare per ciascuna cella un valore coerentemente con il modello probabilistico usato per il GLM.

Il prediction error sarà uguale e quello ottenuto con l'approccio analitico.

Una interessante generalizzazione: GLM e la distribuzione Tweedie

I pagamenti incrementali, in genere definiti da un processo Poisson composto, $\tilde{P}_{ij} = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{Z}_{ij}$, si dicono avere distribuzione di Tweedie che risulta essere appartenente alla famiglia esponenziale sovradispersa. Indicata con μ_{ij} la media del processo $\tilde{P}_{ij}$ e supponendo che $\mu_{ij} = \alpha_i \beta_j$, con α_i, β_j coefficienti che descrivono il contributo del anno di generazione *i* e dell'antidurata *j* la caratterizzazione del modello GLM con componente tweedie avviene definendo una funzione legame e una funzione varianza di tipo potenza del tipo

$$g(\mu_{ij}) = \mu_{ij}{}^{q}$$

$$V(\mu_{ij}) = \phi \mu_{ij}{}^{p}$$

- p=0 si ottiene la distribuzione Normale
- p=1 si ottiene la distribuzione Poisson
- 1<p<2 si ottiene una distribuzione composta
- p=2 si ottiene una distribuzione Gamma
- 2<p<3 si ottiene una distribuzione con supporto positivo
- p=3 si ottiene la distribuzione Inversa Gaussiana

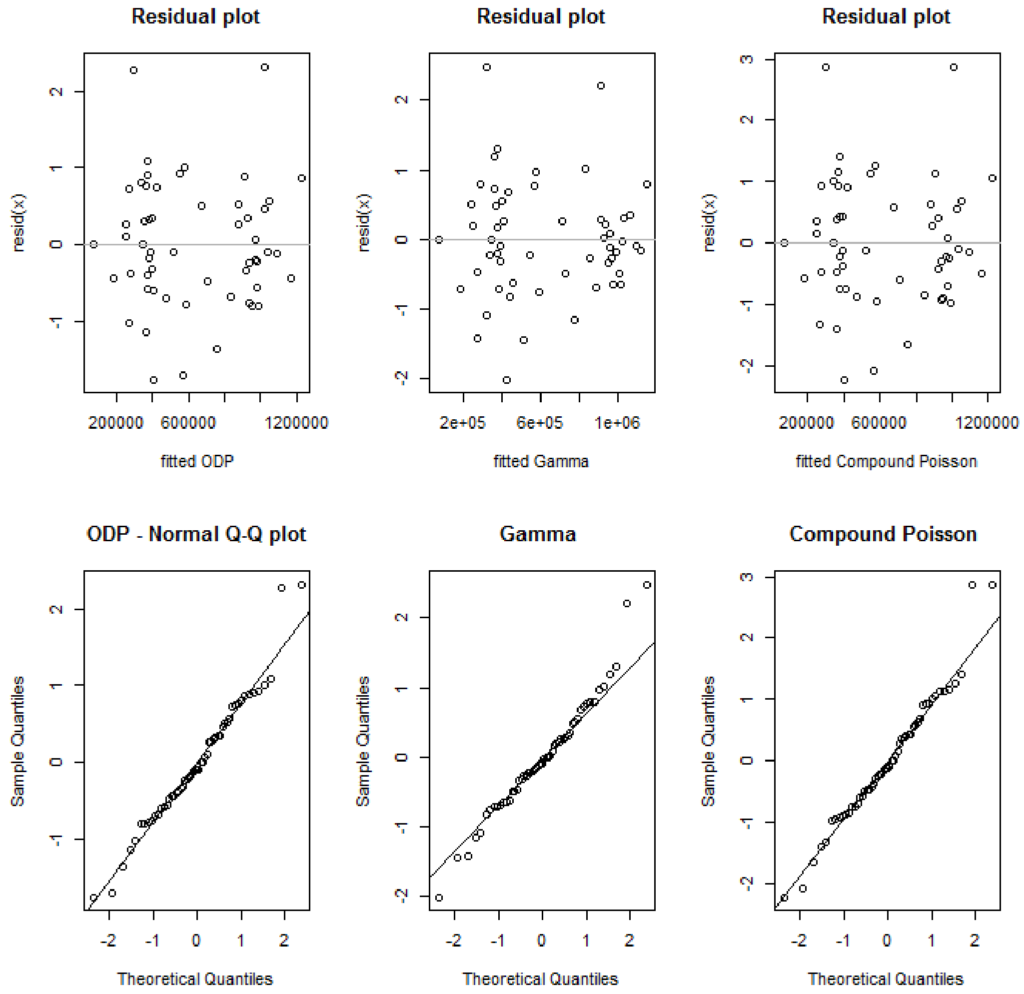
Per q=0 si ottiene l'usuale legame logaritmico

⇨ Il parametri *p,q* possono essere oggetto di stima con la massima verosimiglianza

```
# Tweedie

x <- seq(0,2,len=10)
p <- seq(1,2,len=10)
Tweedie <- NULL

for(xx in 1:10){
for(pp in 1:10){

fit2 <- glmReserve(CUM_UGF, link.power=x[xx], var.power = p[pp])
Tweedie<- rbind(Tweedie, c(fit2$summary$IBNR[12],fit2$summary$S.E[12],x[xx],p[pp]))
}}
```

GLM
Taylor Ashe Triangle

	ODP	GAMMA	Compound Poisson
(Intercept)	12.5064	12.5595	12.5144
factor(origin)2	0.3313	0.3173	0.3267
factor(origin)3	0.3211	0.2834	0.3145
factor(origin)4	0.3060	0.1654	0.2900
factor(origin)5	0.2193	0.2306	0.2187
factor(origin)6	0.2701	0.2730	0.2687
factor(origin)7	0.3722	0.3523	0.3683
factor(origin)8	0.5533	0.4619	0.5430
factor(origin)9	0.3689	0.3071	0.3608
factor(origin)10	0.2420	0.1889	0.2340
factor(dev)2	0.9125	0.9086	0.9112
factor(dev)3	0.9588	0.9316	0.9554
factor(dev)4	1.0260	0.9975	1.0214
factor(dev)5	0.4353	0.4145	0.4335
factor(dev)6	0.0801	0.1108	0.0836
factor(dev)7	-0.0064	-0.0542	-0.0107
factor(dev)8	-0.3945	-0.4497	-0.4005
factor(dev)9	0.0094	-0.0594	0.0015
factor(dev)10	-1.3799	-1.4330	-1.3879



	ODP				Gamma				Compound Poisson				Mack
	Ultimate	Reserve	Pred. Error	CV	Ultimate	Reserve	Pred. Error	CV	Ultimate	Reserve	Pred. Error	CV	CV
1	3.901.463	0	0	-	3.901.463	0	0	-	3.901.463	0	0	-	-
2	5.433.719	94.634	110.100	1,1634	5.432.401	93.316	45.166	0,4840	5.433.287	94.202	91.599	0,9724	0,7982
3	5.378.826	469.511	216.043	0,4601	5.355.822	446.507	160.557	0,3596	5.375.802	466.487	186.546	0,3999	0,2592
4	5.297.906	709.638	260.872	0,3676	5.199.415	611.147	177.625	0,2906	5.287.244	698.976	223.723	0,3201	0,1882
5	4.858.200	984.889	303.550	0,3082	4.865.338	992.027	254.471	0,2565	4.859.313	986.002	264.763	0,2685	0,2654
6	5.111.171	1.419.459	375.014	0,2642	5.144.798	1.453.086	351.334	0,2418	5.115.506	1.423.794	333.247	0,2341	0,2896
7	5.660.771	2.177.641	495.378	0,2275	5.669.292	2.186.162	526.288	0,2407	5.663.087	2.179.957	452.934	0,2078	0,2564
8	6.784.799	3.920.301	789.961	0,2015	6.529.570	3.665.072	941.322	0,2568	6.761.729	3.897.231	754.581	0,1936	0,2233
9	5.642.266	4.278.972	1.046.514	0,2446	5.485.699	4.122.405	1.175.946	0,2853	5.626.542	4.263.248	1.019.459	0,2391	0,2270
10	4.969.825	4.625.811	1.980.101	0,4281	4.860.096	4.516.082	1.667.392	0,3692	4.955.325	4.611.311	1.910.991	0,4144	0,2947
total	53.038.946	18.680.856	2.945.661	0,1577	52.443.894	18.085.805	2.702.710	0,1494	52.979.298	18.621.208	2.831.456	0,1521	0,1310

Il Bootstrapping

Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving. England, P. and Verrall, R., Insurance Mathematics and Economics, 25:281-293, 1999.

Addendum to analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claim reserving. England, P. Insurance Mathematics and Economics, 31:461-466, 2002.

- Una tecnica alternativa utilizzata per ottenere una distribuzione simulata di probabilità è rappresentata dal Bootstrapping. Tale tecnica ovvia l'inconveniente di dover trattare con formule complesse per il calcolo del prediction error.

- **Il Bootstrapping** è una tecnica potente ed allo stesso tempo semplice applicata per ottenere una serie di informazioni da un campione di dati, in alternativa all'utilizzo di tecniche analitiche.

- La metodologia fa riferimento alla tecnica del **campionamento con ripetizione** dei dati osservati, in modo da creare un gran numero di insiemi di pseudo-dati che risultino coerenti con la distribuzione sottostante.

- In vari articoli scientifici (si segnalano in particolare gli autori **England e Verrall**) il metodo è stato utilizzato per simulare il Process Error, oltre all'utilizzo del bootstrapping al fine di ottenere l'Estimation Error da cui poter ricavare una "*predictive distribution*".

- Il Bootstrap è una metodologia introdotta da Efron (1979) allo scopo di ottenere proprietà di uno stimatore attraverso l'estrazione (con ricampionamento) da una distribuzione empirica.

- Dato un insieme di osservazioni assunte i.i.d., è possibile estrarre con ripetizione dalla distribuzione empirica un numero N di *resampled dataset* di dimensione pari al dataset osservato.

- Tale approccio risulta interessante quando:
  - La distribuzione dello stimatore è ignota o difficile da ottenere
  - La distribuzione del campione è limitata per fare inferenza

- Approcci alternativi sono basati sul bootstrap applicato ai residui e sul parametric bootstrap.

- Le simulazioni effettuate permetteranno di ottenere **la distribuzione della riserva complessiva** e delle singole riserve per ogni generazione.

- **Il valore medio della distribuzione consente di ottenere la stima della best estimate**, che per le ipotesi fatte converge al crescere del numero di simulazioni al valore ottenuto applicando il chain-ladder al triangolo base (non c'è una piena coincidenza).

- L'analisi delle principali caratteristiche della distribuzione (varianza e asimmetria) fornirà indicazioni in merito **alla variabilità di tale stima**.

- Infine l'utilizzo della distribuzione della riserva permette sia il calcolo del percentile e dell'eventuale **risk margin calcolato mediante il quantile approach** sia un'eventuale quantificazione del **risk capital per il reserve risk** del singolo ramo (si veda *one-year approach descritto nel seguito*).

I primi step

Ipotizzando un triangolo di dimensione n con *i=1,2…n* e *j=1,2…n*

E' possibile applicare la metodologia mediante le seguenti fasi:

1. Calcolare **i fattori di sviluppo** dai dati cumulati mediante il metodo Chain-Ladder standard

$$\boxed{\lambda_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{ij}}}$$

2. Ottenere **in modo ricorsivo, partendo dai pagamenti cumulati sulla diagonale, a ritroso i dati cumulati** utilizzando i fattori di sviluppo λ_j

$$\boxed{\dot{C}_{i,j} = \begin{cases} C_{i,j} & se \;\; j = n-i+1 \\ \dot{C}_{i,j+1} * (\lambda_j)^{-1} & se \;\; j < n-i+1 \end{cases}}$$

3. Calcolare **i dati incrementali** del nuovo triangolo stimati

$$\boxed{\dot{P}_{ij} = \dot{C}_{i,j} - \dot{C}_{i,j-1}}$$

Il calcolo dei residui

4. Calcolare **gli scarti del Pearson**

$$\boxed{r_{i,j}^{P} = \frac{P_{i,j} - \dot{P}_{i,j}}{\sqrt{\dot{P}_{i,j}}}}$$

5. Calcolare **gli scarti del Pearson corretti** (i cosiddetti residui adjusted)

$$\boxed{r_{i,j}^{adj} = r_{i,j}^{P} \cdot \sqrt{\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2} - (2n-1)}}}$$

Aggiustamento per considerare i gradi di libertà

Il campionamento e il nuovo triangolo inferiore

6. Compiere un numero N sufficientemente grande di simulazioni, in cui in ogni simulazione h:

– si crea un nuovo triangolo di residui corretti $r_{i,j}^{adj,h}$ mediante un campionamento con reinserimento

– si ricostruisce il triangolo di dati incrementali $P_{i,j}^{h}$ mediante la seguente relazione inversa

$$\boxed{P_{i,j}^{h} = r_{i,j}^{adj,h}\sqrt{\dot{P}_{i,j}} + \dot{P}_{i,j}}$$

- si costruisce il triangolo dei dati cumulati e si ricava la riserva R^{h} applicando il metodo Chain-Ladder

- **Il Bootstrapping permette** (come evidenziato in England&Verrall 1999) di **stimare unicamente la componente di estimation error** relative al prediction error.

- **Allo scopo di considerare anche il process error**, viene proposta inizialmente una formula chiusa (England e Verrall 1999) e successivamente (England 2002) un algoritmo simulativo da implementare sui risultati del Bootstrapping allo scopo di ottenere la distribuzione complessiva.

- La formula chiusa proposta nel 1999 prevede che il prediction error sia ottenuto nel modo seguente:

$$\boxed{\sqrt{PRV(\tilde{R})} = \sqrt{\phi \cdot R + \left(\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2} - (2n-1)}\right)\sigma^2_{Boot}(R)}}$$

Scale Parameter

$$\phi = \frac{\sum_{i+j\le n+1}\left(r_{ij}^{(P)}\right)^2}{\frac{1}{2}n\cdot(n+1) - 2n + 1}$$

Process Variance

Estimation Variance

$\sigma^2_{Boot}(R)$: varianza ottenuta dal Bootstrapping (senza correzione sui residui)

Fattore di correzione dei residui per considerare i gradi di libertà

Over Dispersed Poisson

- England e Verrall propongono una simulazione basata su una distribuzione **Over Dispersed Poisson (ODP)**

- Ipotizzando indipendenza tra le celle del triangolo di run-off, si procede alla simulazione del costo pagato in ogni singola cella, utilizzando la distribuzione ODP proposta da England e Verrall basata sui seguenti momenti:

$$\boxed{E(\hat{P}_{ij}) = P_{ij}} \qquad \boxed{\sigma^2(\hat{P}_{ij}) = \phi P_{ij}}$$

- Come evidenziato da De Felice e Moriconi (nel loro articolo del 2003), il pagato incrementale in ogni singola cella può essere simulato mediante una distribuzione di Poisson con parametro pari a $\mathbf{P_{ij}}/\phi$ e moltiplicando il risultato ottenuto per ϕ

  In alternativa è possibile simulare da una **Binomiale Negativa** con media e varianza descritti dalla formule definite sopra.

Alcuni esempi

50,000 simulazioni

Triangolo Taylor-Ashe

	Mack		Bootstrapping			ODP		
	Riserva	P.E./BE	Media	C.V.	Asimmetria	media	C.V.	Asimmetria
1	-	**0.00%**	-			-		
2	94,633.81	**79.82%**	95,986.27	**90.13%**	0.59	96,129.67	**118.68%**	1.09
3	469,511.29	**25.92%**	473,991.67	**31.87%**	0.51	473,581.74	**46.36%**	0.60
4	709,637.82	**18.82%**	716,108.07	**24.92%**	0.47	716,492.20	**36.92%**	0.50
5	984,888.64	**26.54%**	991,936.02	**20.54%**	0.47	991,892.72	**30.94%**	0.45
6	1,419,459.46	**28.96%**	1,428,176.06	**18.16%**	0.44	1,429,267.44	**26.44%**	0.42
7	2,177,640.62	**25.64%**	2,191,661.11	**16.69%**	0.43	2,192,312.55	**22.79%**	0.39
8	3,920,301.01	**22.33%**	3,946,111.07	**16.52%**	0.42	3,943,996.97	**20.20%**	0.38
9	4,278,972.26	**22.70%**	4,311,961.94	**21.81%**	0.47	4,310,977.94	**24.40%**	0.45
10	4,625,810.69	**29.47%**	4,709,426.47	**42.06%**	0.67	4,706,887.66	**43.38%**	0.69
	18,680,855.61	13.10%	**18,865,358.68**	15.01%	0.43	**18,861,538.88**	15.91%	0.41

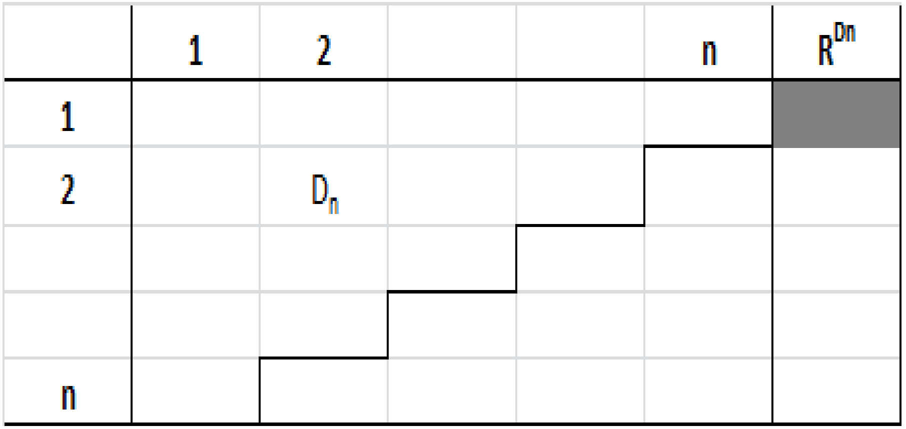
Un approccio One-Year: la formula di Merz e Wuthrich

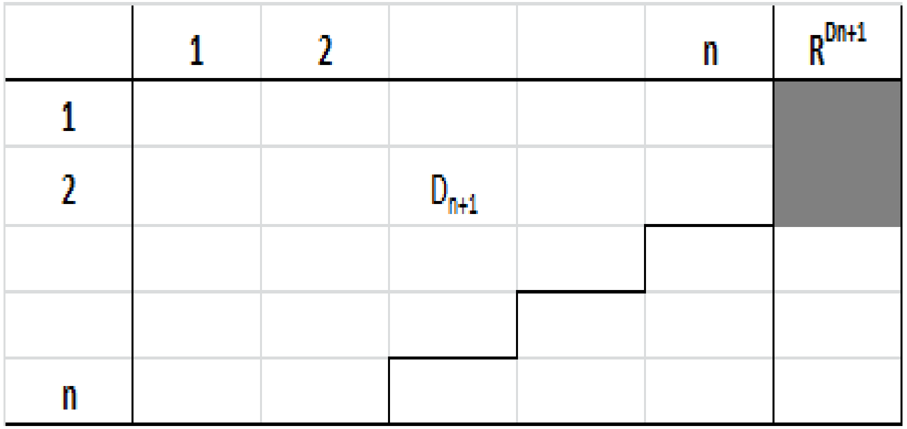
Claims Development Results

Considerando un triangolo senza coda (i=1,2,..n e j=1,2…n) (i risultati valgono anche per un numero di righe maggiore del numero di colonne), e indicando con D_n le informazioni disponibili al tempo n, è possibile definire la seguente grandezza, denominata **Claims Development Result** (CDR):

$$\boxed{CDR_i = R_i^{D_n} - (R_i^{D_{n+1}} + X_{i,n-i+2})}$$

Pari alle differenze tra la riserva iniziale (deterministica e funzione delle informazioni note al tempo n) e la somma dei pagamenti incrementali X effettuati nel corso dell'anno e della nuova riserva stimata in funzione delle nuove osservazioni al tempo n+1.





Ipotizzando di utilizzare un metodo stocastico basato sul chain-ladder classico, sarà possibile stimare i **fattori di sviluppo** alle epoche n e n+1:

$$\hat{\lambda}_j^n = \frac{\sum_{i=1}^{n-i} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-i} C_{i,j}} \quad j = 1,2,\ldots,n-1 \qquad \hat{\lambda}_{j+1}^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n-i+1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-i+1} C_{i,j}} \quad j = 1,2,\ldots,n-1$$

Si dimostra agevolmente che, <u>in queste ipotesi</u>,vale:

$$\boxed{E(R_i^{D_n}) = E(R_i^{D_{n+1}} + X_{i,n-i+2})}$$

Il prediction error del CDR per generazione

Il **prediction error del CDR** relativo alla i-ma generazione è definito come la radice quadrata della seguente espressione:

$$msep_{CDR_i(n+1)|D_n}(0) =$$

$$= E\left[\left(CDR_i(n+1)-0\right)^2 \mid D_n\right] = E\left[\left(\hat{C}_{i,J}^{n} - \hat{C}_{i,J}^{n+1}\right)^2 \mid D_n\right] =$$

$$= \hat{C}_{i,n}^2 \left[\frac{\hat{\sigma}_{n-i+1}^2 / \left(\hat{\lambda}_{n-i+1}^n\right)^2}{C_{i,n-i+1}} + \frac{\hat{\sigma}_{n-i+1}^2 / \left(\hat{\lambda}_{n-i+1}^n\right)^2}{\sum_{k=1}^{i-1} C_{k,n-i+1}} + \sum_{j=n-i+2}^{n-1} \frac{C_{n-j+1,j}}{\sum_{k=1}^{n-j+1} C_{k,j}} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \left(\hat{\lambda}_j^n\right)^2}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right]$$

Pari a 0 per i=1

Pari a 0 per i=1 e 2

Tale formula viene proposta anche in una versione alternativa ma con risultati analoghi, allo scopo di evidenziare la distinzione tra process variance e estimation variance (si veda formula 3.11 Merz-Wuthrich (2008)).

Il prediction error del CDR complessivo

Il prediction error aggregato è ottenuto come la radice della somma delle prediction variance delle singole generazioni più un termine correttivo che considera la dipendenza tra generazioni:

$$msep_{\sum_i CDR_i(n+1)|D_n}(0) = \sum_i msep_{CDR_i(n+1)|D_n}(0)$$

$$+2\sum_{i<l}\hat{C}_{i,n}^{I}\hat{C}_{l,n}^{I}\left[\frac{\hat{\sigma}_{n-i+1}^{2}/\left(\hat{\lambda}_{n-i+1}^{n}\right)^{2}}{\sum_{k=1}^{i-1}C_{k,n-i+1}}+\sum_{j=n-i+2}^{n-1}\frac{C_{n-j+1,j}}{\sum_{k=1}^{n-j+1}C_{k,j}}\frac{\hat{\sigma}_{j}^{2}/\left(\hat{\lambda}_{j}^{n}\right)^{2}}{\sum_{k=1}^{n-j}C_{k,j}}\right]$$

Pari a 0 per i=1

Anche tale formula viene proposta in una versione alternativa ma con risultati analoghi, allo scopo di evidenziare la distinzione tra process variance e estimation variance (si veda formula 3.15 e 3.16 Merz-Wutrich (2008)).

Merz-Wuthrich formula vs Mack formula
Taylor Ashe Triangle

Mack vs Merz-Wuthrich		Pred. Error			CV	
	Claims Reserve	CDR	R	P.E. CDR /P.E. R	CDR	R
1	0	0	0			
2	94,634	75,535	75,535	100.00%	79.82%	79..82%
3	469,511	105,309	121,699	86.53%	22.43%	25.92%
4	709,638	79,846	133,549	59.79%	11.25%	18.82%
5	984,889	235,115	261,406	89.94%	23.87%	26.54%
6	1,419,459	318,427	411,010	77.47%	22.43%	28.96%
7	2,177,641	361,089	558,317	64.67%	16.58%	25.64%
8	3,920,301	629,681	875,328	71.94%	16.06%	22.33%
9	4,278,972	588,662	971,258	60.61%	13.76%	22.70%
10	4,625,811	1,029,925	1,363,155	75.55%	22.26%	29.47%
Total	**18,680,856**	**1,778,968**	**2,447,095**	**72.70%**	**9.52%**	**13.10%**

Parte IV.

UNDERTAKING SPECIFIC PARAMETERS

Le distribuzioni empiriche dei principali indicatori tecnici:

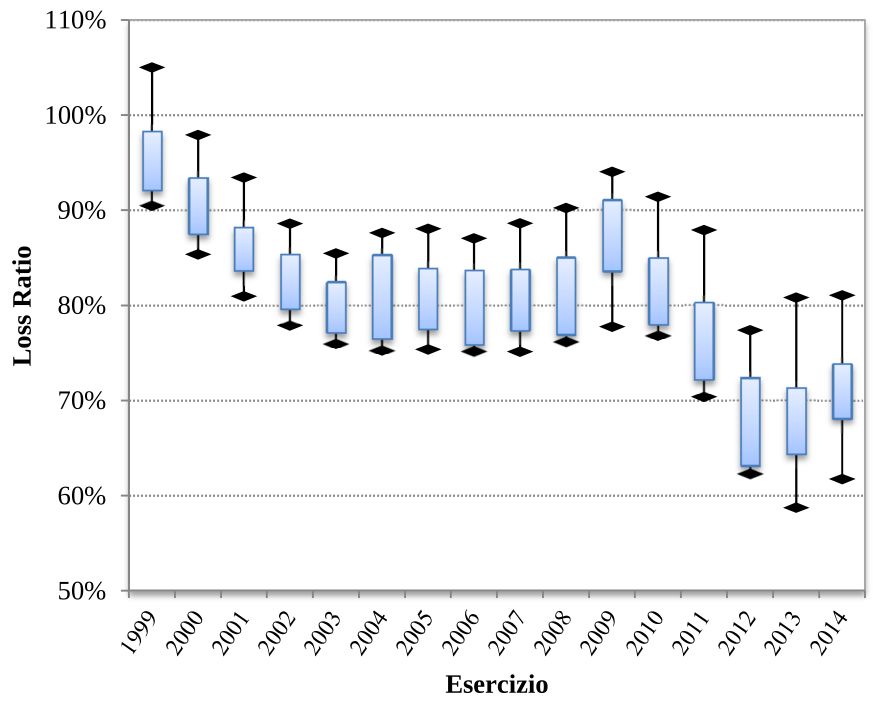
dati mercato Italia - ramo R.C. Auto

Loss Ratio – R.C. Auto

Lavoro diretto

Elaborazioni su dati Infobila 2015. ANIA

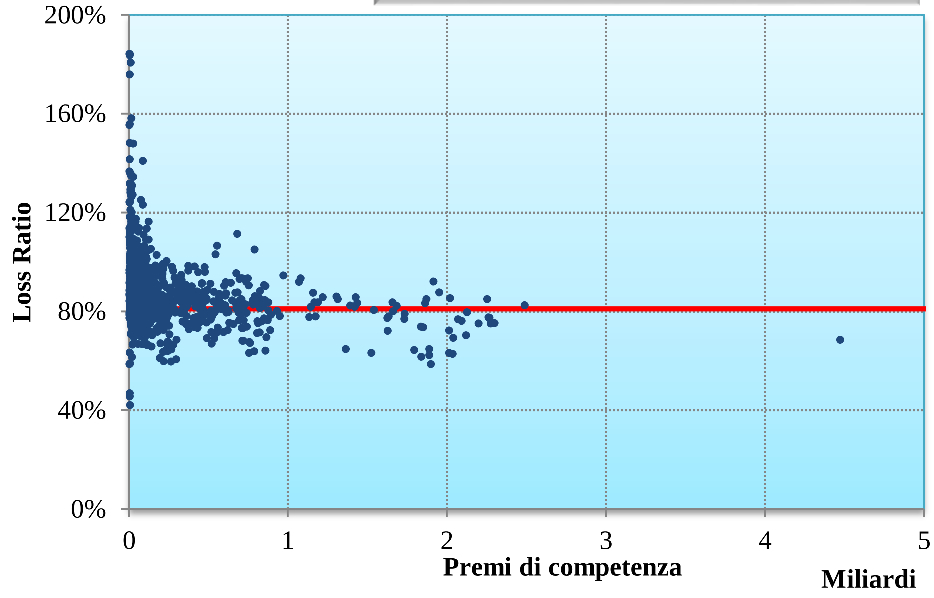
Anno	Media	Std	Skew	Min	Max
1999	96,4%	7,0%	2,66	75,5%	140,9%
2000	90,9%	6,2%	4,81	77,4%	224,5%
2001	86,8%	6,0%	1,85	74,9%	129,3%
2002	82,4%	6,8%	2,62	58,7%	180,8%
2003	80,5%	6,3%	2,61	59,8%	148,0%
2004	80,9%	5,8%	1,31	64,1%	113,6%
2005	81,5%	5,8%	0,81	64,4%	113,7%
2006	81,4%	6,1%	1,83	59,0%	136,6%
2007	81,1%	5,6%	2,24	70,2%	176,0%
2008	82,9%	6,1%	2,35	73,4%	184,2%
2009	87,7%	8,1%	2,18	75,0%	183,7%
2010	83,5%	7,1%	2,52	75,3%	184,3%
2011	76,9%	7,3%	1,97	63,4%	128,7%
2012	68,4%	7,8%	2,40	45,6%	155,8%
2013	68,5%	7,4%	1,47	46,9%	148,2%
2014	71,8%	7,9%	2,40	42,1%	158,1%
				CoV	**Unità**
2009-2014	76,1%	10,6%	0,93	13,9%	292
1999-2014	81,0%	9,7%	0,63	12,0%	946

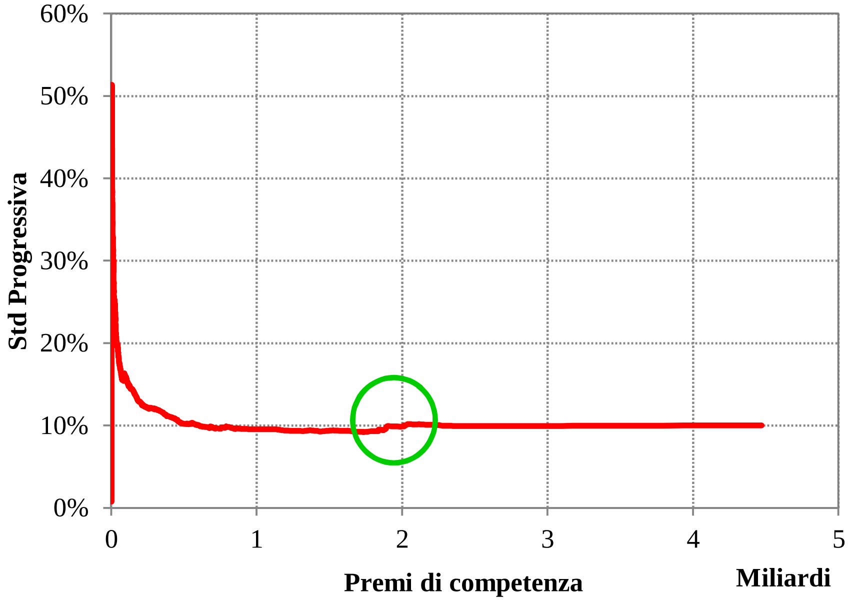


Nella tabella sono riportate le principali statistiche dell'indicatore **Loss Ratio** (Sinistri dell'esercizio corrente pagati e riservati su Premi di Competenza) per il **ramo RCA**. L'orizzonte temporale è **1999-2014** e ciascun valore è ponderato per una misura di volume (**Premi di Competenza** di ciascuna compagnia).
A fronte di un periodo di consistente riduzione dell'incidenza del costo dei sinistri (quinquennio 2009-2013), nell'**esercizio 2014** si osserva un incremento del **Loss Ratio che si attesta al 71,8%.** Si sottolinea come tale incremento dell'indicatore sia dovuto ad una diminuzione dei premi di competenza (-7,6%) più marcata rispetto al costo del pagato e riservato (-6,6%) nell'anno 2014.
In alto a destra sono riportati i Box plot dell' indicatore relativi alla **distribuzione ponderata** usando come misura di volume di ciascun Loss Ratio i **Premi di Competenza** della Compagnia **su orizzonte annuale.**

Il grafico mostra lo scatter-plot dei **Loss Ratio** rispetto ai **Premi di Competenza nel ramo RCA** relativo a singole compagnie/anno.
Si può osservare che, seppur diminuendo la variabilità, permangano livelli molto diversi di Loss Ratio anche per le osservazioni con oltre un miliardo di premi. Ciò è dovuto al **decremento dell'indicatore negli ultimi 15 anni**.

Elaborazioni su dati Infobila 2015. ANIA



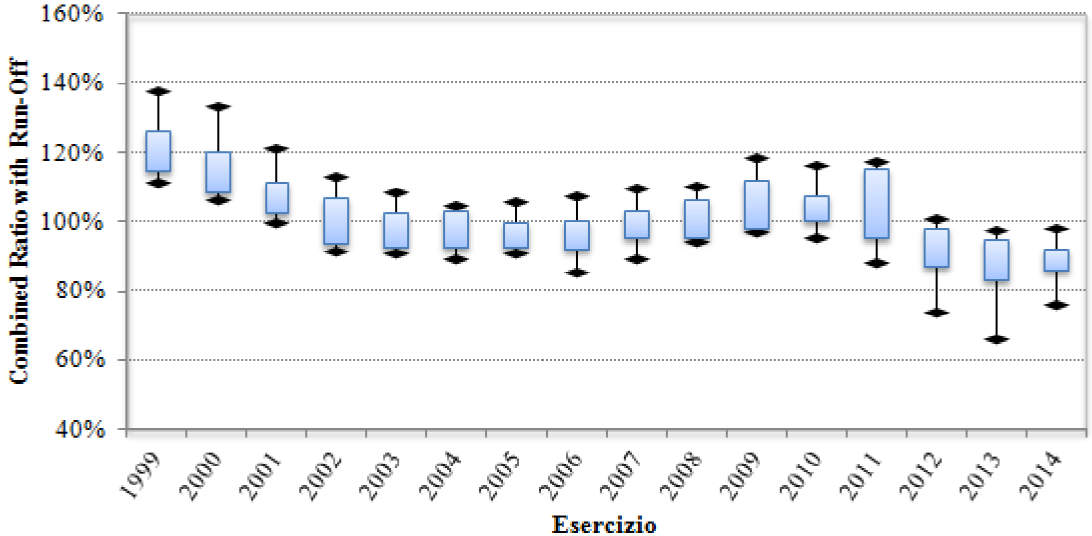


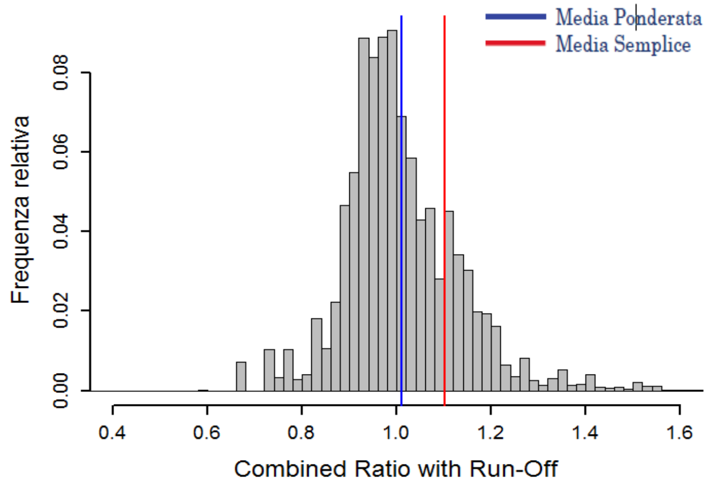
Quanto osservato in merito alla permanenza di variabilità per le osservazioni oltre il miliardo di premi è evidenziato anche nel grafico della **Std progressiva**; per premi pari a 2 miliardi, infatti, la Std progressiva cresce per effetto della maggiore variabilità.

Combined Ratio con Run-Off – R.C. Auto

Lavoro diretto

Elaborazioni su dati Infobila 2015. ANIA





Anno	Media	Std	Skew	Min	Max
1999	121,9%	11,8%	2,10	105,9%	195,4%
2000	116,7%	13,4%	3,73	101,8%	228,6%
2001	109,3%	9,2%	1,44	91,0%	174,1%
2002	101,7%	12,3%	7,32	-7,1%	348,0%
2003	98,8%	8,5%	3,00	73,7%	192,8%
2004	97,4%	8,3%	0,08	71,4%	222,0%
2005	96,6%	7,2%	0,28	77,3%	141,3%
2006	97,1%	9,8%	0,82	64,5%	165,7%
2007	99,0%	8,3%	1,59	74,0%	172,5%
2008	100,8%	9,1%	1,21	78,4%	203,3%
2009	107,6%	12,9%	2,67	78,8%	237,2%
2010	105,3%	11,1%	2,84	89,6%	245,4%
2011	102,8%	11,1%	0,79	80,6%	185,5%
2012	92,4%	12,8%	2,01	34,2%	203,9%
2013	88,1%	10,0%	-0,55	45,1%	174,2%
2014	90,4%	10,1%	0,92	-5,4%	195,0%

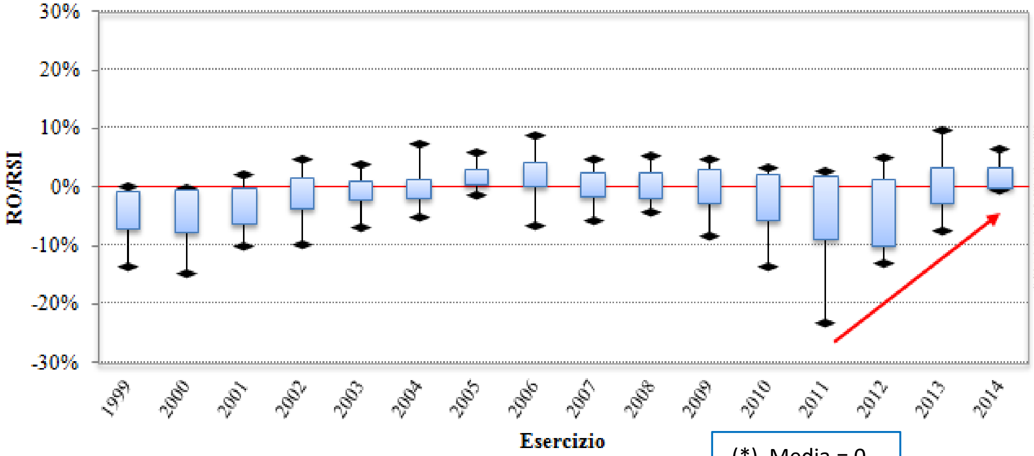
- Nella tabella sono riportati le principali statistiche per l'analisi del **Combined Ratio with Run-Off** (Loss Ratio + Expense Ratio – Run-Off) per il **ramo RCA**.
- L'orizzonte temporale è **1999-2014** e ciascun valore è ponderato per una misura di volume (**Premi competenza** di ciascuna compagnia).
- Il Box-plot evidenzia per l'anno 2014 un incremento significativo del decimo percentile della distribuzione ponderata; l'asimmetria, inoltre, risulta essere positiva (0,92), cambiando segno rispetto all'esercizio 2013.

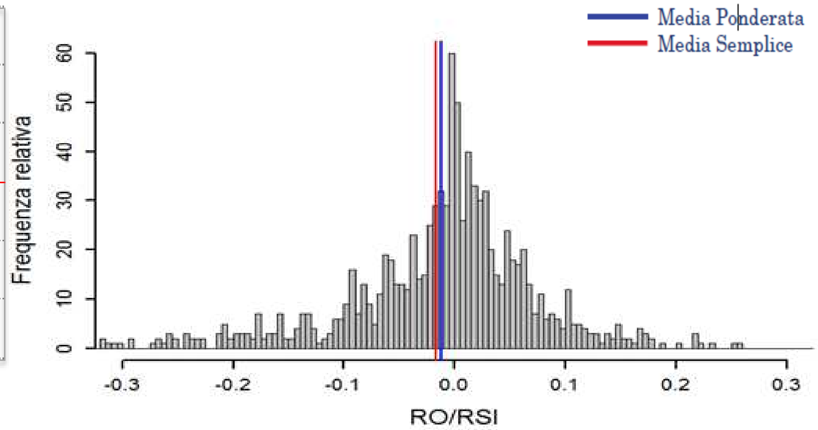
	Media	Sd	Skew	CoV	Unità
2009-2014	97,8%	13,8%	1,09	14,1%	292
1999-2014	101,0%	13,3%	1,53	**13,2%**	946

Run-Off su Riserva Sinistri Iniziale R.C. Auto

Lavoro diretto

Elaborazioni su dati Infobila 2015. ANIA





(*) Media = 0

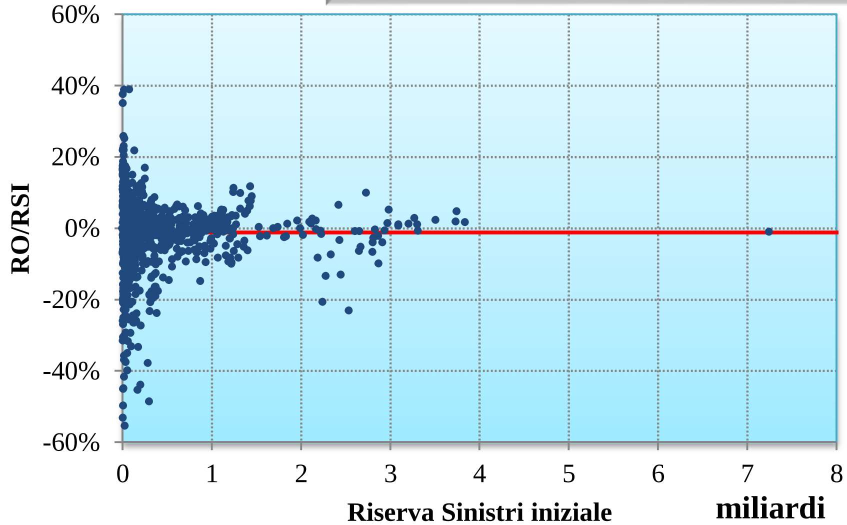
Anno	Media	Std	Std*	Skew	Skew*	Min	Max
1999	-5,1%	7,2%	8,8%	-1,64	-2,23	-53,1%	21,8%
2000	-5,6%	7,1%	9,1%	-2,00	-2,35	-55,4%	14,8%
2001	-3,2%	5,3%	6,1%	-0,68	-1,70	-31,5%	25,9%
2002	-1,4%	5,7%	5,9%	-1,23	-1,80	-23,3%	37,6%
2003	-0,7%	4,9%	5,0%	-0,96	-1,36	-36,9%	14,8%
2004	0,8%	4,8%	4,8%	0,79	1,22	-13,9%	38,9%
2005	1,8%	4,1%	4,4%	-0,96	0,36	-18,6%	16,2%
2006	1,4%	6,5%	6,6%	-2,44	-1,68	-49,7%	23,0%
2007	0,2%	4,5%	4,5%	-1,45	-1,29	-19,1%	22,0%
2008	0,4%	4,8%	4,8%	-1,23	-1,00	-24,5%	15,6%
2009	-0,7%	5,6%	5,7%	-1,00	-1,34	-29,4%	35,1%
2010	-2,4%	7,1%	7,5%	-2,04	-2,63	-45,4%	14,6%
2011	-5,7%	9,4%	11,0%	-0,82	-1,79	-41,7%	13,8%
2012	-4,1%	8,8%	9,7%	-2,28	-2,82	-48,5%	22,3%
2013	0,4%	5,1%	5,1%	0,34	0,58	-15,9%	21,8%
2014	1,9%	3,8%	4,2%	2,67	3,08	-24,4%	39,0%

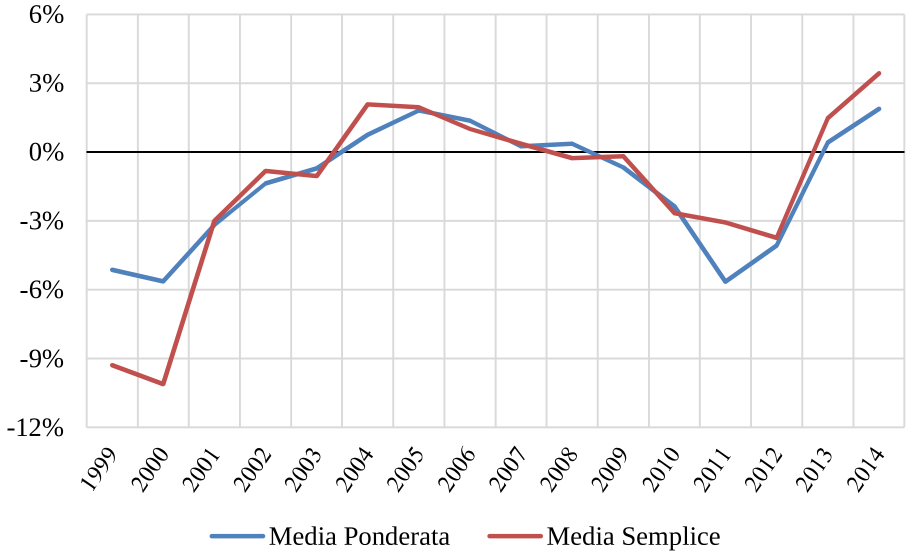
- Nella tabella sono riportati i principali statistiche per l'analisi del **Run-Off sulla Riserva Sinistri Iniziale per il ramo RCA**.
- L'orizzonte temporale è **1999-2014** e ciascun valore è ponderato per una misura di volume (**Riserva Sinistri Iniziale** di ciascuna compagnia).
- Il Box-plot dell'indicatore evidenzia per l'orizzonte temporale 2011-2014 un trend crescente, una maggiore concentrazione della distribuzione e un'asimmetria crescente.

Anno	Media	Std	Std*	Skew	Skew*	Unità
2009-2014	-1,9%	7,4%	7,6%	-1,68	-2,24	302
1999-2014	-1,2%	6,5%	6,7%	-1,66	-2,11	963

Elaborazioni su dati Infobila 2015. ANIA

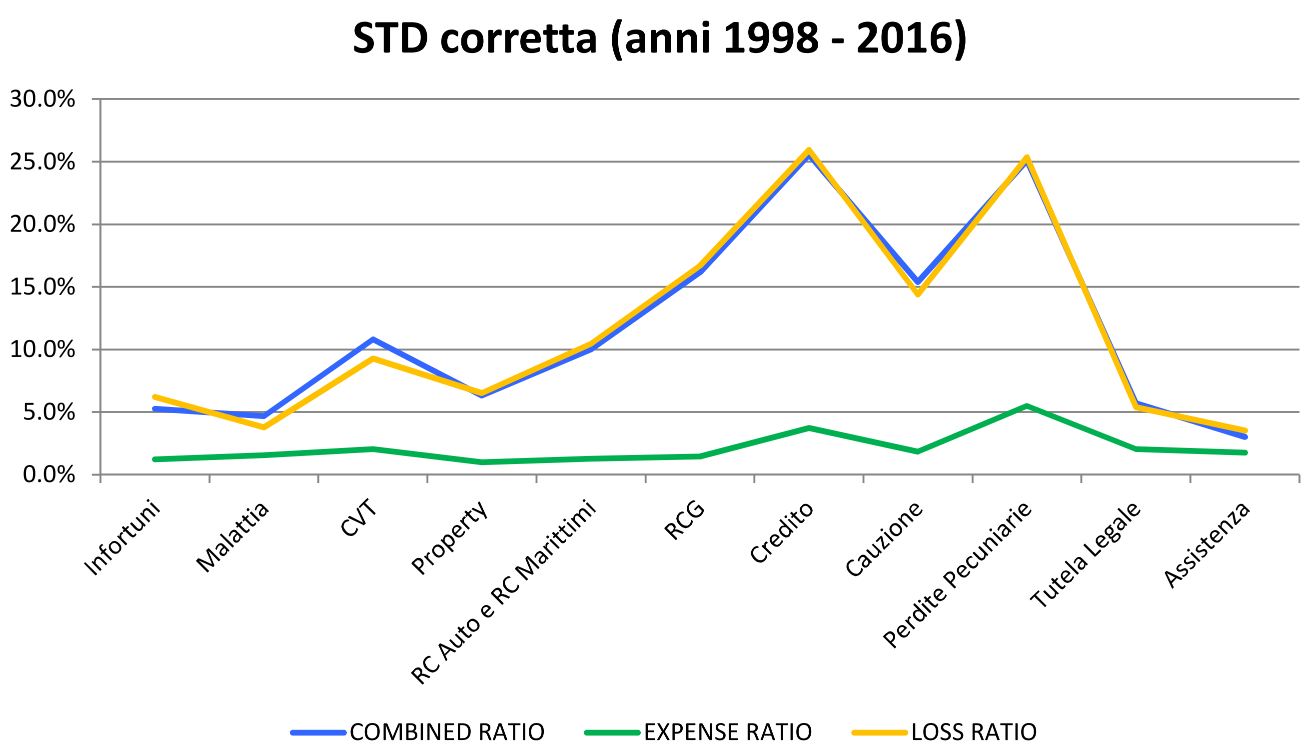
Il grafico mostra lo scatter-plot del **Run-Off /Riserva Sinistri Iniziale** ponderato per la **Riserva Sinistri Iniziale** relativo alle singole compagnie/anno per il ramo RCA. Si osserva che la convergenza dell'indicatore verso il valore medio di mercato è in parte disattesa per la fascia di volume della Riserva Sinistri Iniziale compresa tra i 2 ed i 3 miliardi di Euro.





Il grafico a sinistra confronta la media semplice (linea rossa) e la media ponderata (linea blu) dell'indicatore per tutti gli esercizi dell'orizzonte temporale 1999-2014. La media semplice è in generale in linea con quella ponderata a meno dei primi due e ultimi tre esercizi in cui risulta, rispettivamente, inferiore e maggiore della media ponderata.

Variabilità Expense Ratio e Loss Ratio



Ramo	σ(ER)/ σ(LR)
Infortuni	19,8%
Malattia	41,2%
CVT	22,2%
Property	15,2%
RCA	12,3%
RCG	8,7%
Credito	14,4%
Cauzione	12,8%
Perdite Pec.	21,6%
Tutela Giud.	37,9%
Assistenza	49,9%

I σ sono ottenuti senza ponderazione con i premi. Inoltre si osservi che le correlazioni sono molto instabili al variare dell'orizzonte temporale.

Elaborazioni da Appendici Statistiche ANIA

Undertaking Specific Approach:
le fonti normative

Fonti normativa e documenti comunitari

Le normative ed i documenti comunitari che definiscono e regolamentano le condizioni di utilizzo degli undertaking specific parameter nel calcolo del Requisito di Capitale Sovency II sono, allo stato attuale:

- Codice delle Assicurazioni e Direttiva Europea 2009/138 Solvency II;
- Regolamento Delegato 2015/35 - Atti Delegati (art. 218 -219 -220 e Annex XVII);
- Regolamento IVASS n. 11 del 22 dicembre 2015 che recepisce le Linee Guida EIOPA in tema USP;
- ITS - Commissione EU 2015/498 del 24 marzo 2015, con specifiche tecniche riguardo alla procedura di approvazione USP da parte delle Autorità di Vigilanza;
- Calibration of the Premium and Reserve Risk Factors in the Standard Formula of Solvency II- Report of the Joint Working Group on Non-Life and Health NSLT Calibration, 12/12/2011;

Pillar I : Dalla Standard Formula ai Modelli Interni

La Direttiva Solvency II prevede la possibilità per le imprese di sostituire, nel calcolo dei moduli di rischio di sottoscrizione per l'assicurazione vita, non vita e malattia tramite la Formula Standard, un sottoinsieme di parametri con parametri specifici dell'impresa interessata (USP).

La normativa prevede che i parametri specifici possano essere adottati solo previa autorizzazione da parte dell'Autorità di vigilanza. (*Articolo 104, comma 7, della Direttiva 2009/138/CE)*

Per tener conto delle **peculiarità dei profili di rischio** assunti da ciascuna impresa (e in diretta applicazione del principio di proporzionalità), *Solvency* II prevede la possibilità di derogare all'applicazione della formula *standard*. Così come previsto dalla normativa, le compagnie possono utilizzare un insieme di approcci di **complessità crescente** per il calcolo del *Solvency Capital Requirement*, al fine di consentire la scelta di un modello che si adatti al loro **reale profilo di rischio**.

Standard Formula

- Il requisito patrimoniale (SCR) dovrà essere calcolato almeno una volta l'anno e secondo una formula *standard*, i cui parametri sono predefiniti dalla normativa di settore.

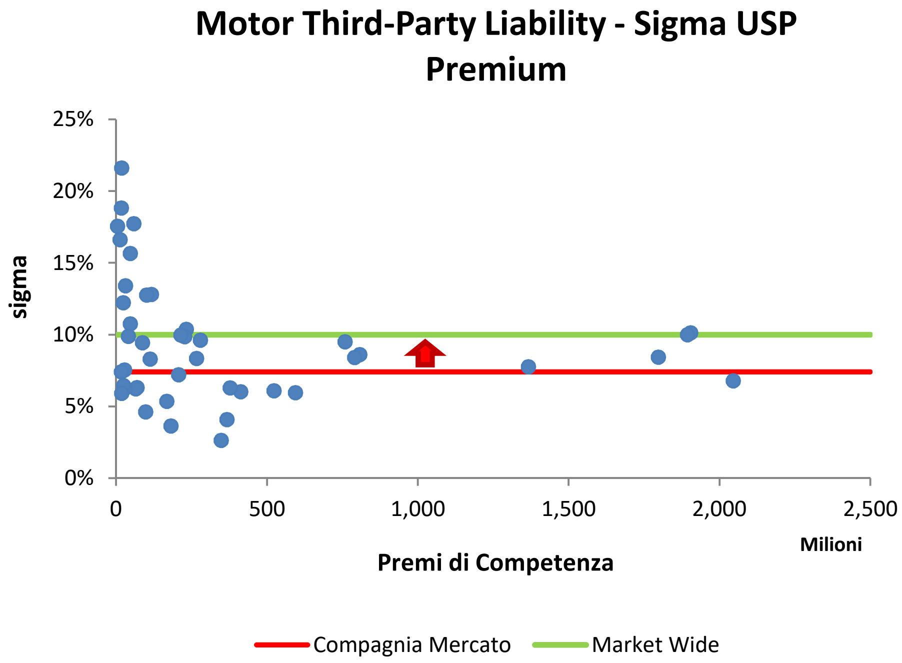
USP

- Le imprese, secondo la normativa di settore, previa autorizzazione da parte dell'autorità di Vigilanza possono a *sostituire* alcuni parametri della formula *standard* con **parametri basati su dati interni**, o esterni (previ accorgimenti previsti dalla norma), più confacenti al profilo d'impresa.

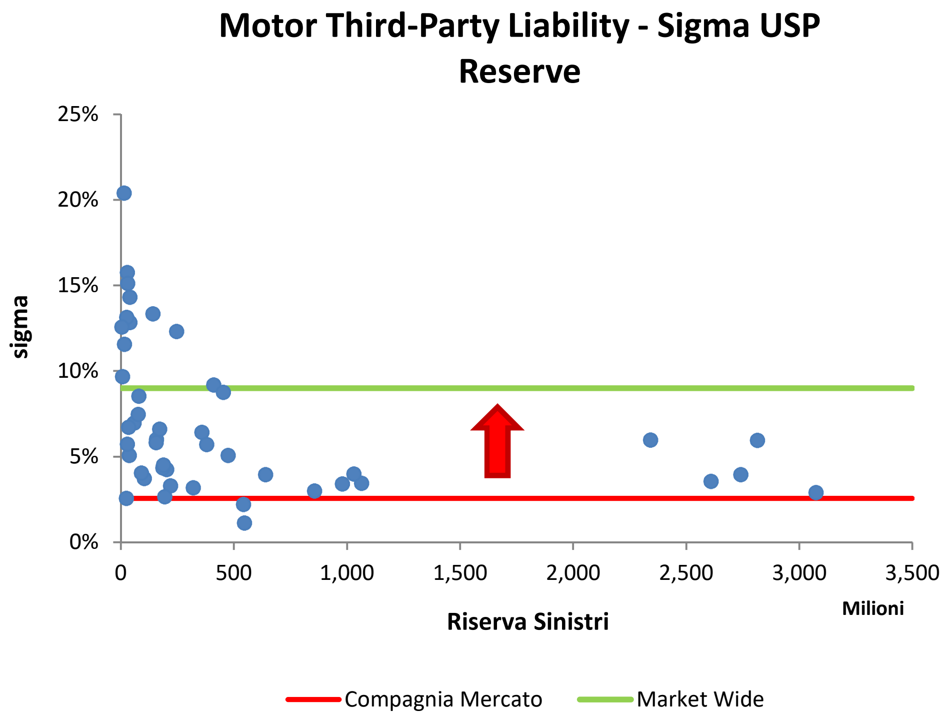
Modelli Interni

- Le imprese, previa autorizzazione da parte dell'autorità di Vigilanza possono utilizzare **Modelli Interni** per la determinazione del requisito di capitale regolamentare. L'implementazione del modello interno nasce dall'esigenza di stimare un SCR più adeguato al profilo di rischio dell'impresa, che sappia coglierne le peculiarità aziendali.

USP Metodo 1 – MTPL
Mercato Italiano 2013



- **Analisi effettuata** sui dati del Mercato Italiano, ricavati da ANIA Infobila 2013 su 46 compagnie con volume premi contabilizzati maggiore di 2 milioni.
- I dati fanno riferimento alle riserve sinistri valutate secondo i principi Local GAAP e non tengono conto dell'attualizzazione delle poste.



- **Sigma USP**: Standard Deviation stimata secondo il Method 1, così come negli Atti Delegati, ipotizzando una credibilità del 100% per ogni compagnia anche con orizzonte temporale <15 anni.

Approcci Market Wide e Undertaking-specific

- Il calcolo delle standard deviation $\sigma_{prem.s}$ dei singoli rami per il **premium risk** e, analogamente, delle $\sigma_{res,s}$ per il **reserve risk** è ottenibile mediante **due approcci**:
  1) ***Market-wide (MW)*:** ottenuto sulla base di **parametri di volatilità prefissati** (***volatility factors***).

     Non si tiene in alcun modo conto dell'effetto dimensionale (eliminato size factor dal QIS3).
  2) ***Undertaking-specific (USP)*** basato su **metodi standardizzati** (un'unica alternativa per il premium risk e due alternative per il reserve risk) forniti all'interno dei "Delegated Acts Solvency II" e sull'**utilizzo** di **parametri specifici dell'impresa** e di un **fattore di credibilità**.

$$\sigma_{(prem,s)} = c_s \cdot \sigma_{(U,prem,s)} + (1-c_s)\cdot \sigma_{(M,prem,s)}$$

Formula valida anche per il $\boldsymbol{\sigma_{(res,s)}}$

- Per tutti i rami sono necessari dati relativi ad almeno 5 anni (N_{lob}>4). Si ottiene una credibilità piena (pari al 100%) in presenza di almeno 15 anni per i rami RC, Credito e Cauzione, con almeno 10 anni per gli altri rami:

Fattore di credibilità relativi ai σ per il premium e reserve risk – RC Generale, RC Auto, Credito e Cauzione

N_s	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	≥15
c_s	34%	43%	51%	59%	67%	74%	81%	87%	92%	96%	100%

Fattore di credibilità relativi ai σ per il premium e reserve risk– Altri rami

N_s	5	6	7	8	9	≥10
c_s	34%	51%	67%	81%	92%	100%

Metodi standardizzati per il Premium e Reserve Risk

Gli approcci USP proposti negli Atti Delegati

Per il calcolo delle deviazione standard unitarie *Undertaking Specific*, gli Atti Delegati (Allegato XVII punto G degli Atti Delegati) prescrivono due differenti **metodologie standardizzate**:

M1

- Per ogni specifico segmento, il **Metodo 1** permette di stimare la variabilità in serie storica di una variabile aleatoria **Y** tenendo conto delle dipendenze verso una variabile esplicativa **X**, che rappresenta una misura di volume.

M2

- Il **Metodo 2** considera, per un determinato segmento, i pagamenti per rimborso dei sinistri ***X*** organizzati in un triangolo di Run-Off per anno di accadimento e per anno di accadimento e per anno di sviluppo, basandosi sull'utilizzo dell'approccio proposto da Merz e Wüthrich

Metodi 1 e 2:
specificazione dei modelli

USP1 Premium Risk (1/3)

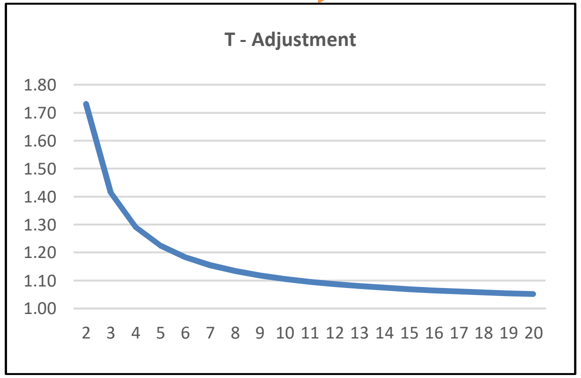
- Gli AD forniscono solo **una metodologia per stimare la volatilità per Premium risk** (nel QIS5 i metodi proposti erano 3).
- Per applicare la metodologia, **per ogni segmento** e per **ogni anno di accadimento** (AY) devono essere soddisfatte le seguenti ipotesi e sono necessari i seguenti dati:

Ipotesi	Dati
• **Il costo atteso (su TH=1 anno) è linearmente proporzionale rispetto ai premi** di competenza in un determinato AY; • la **varianza del danno aggregato è quadratica rispetto ai premi** competenza in un determinato AY; • Il danno aggregato segue una **distribuzione lognormale**; • Il **metodo della massima verosimiglianza** risulta appropriato.	- I **pagamenti effettuati e le best estimates delle riserve per i sinistri ancora da liquidare** alla fine del primo anno di sviluppo (DY) distinti per anno di accadimento (aggregated losses); - I **premi di competenza;** I **Dati** devono essere **disponibili per almeno 5 anni** di accadimento consecutivi. I **Dati** devono essere **aggiustati** in base ai: - Premi e Recuperi riassicurativi - Sinistri catastrofali

USP1 Premium Risk (2/3)

$$\sigma_{(prem,s,USP)} = c \cdot \hat{\sigma}(\hat{\delta},\hat{\gamma}) \cdot \sqrt{\frac{T+1}{T-1}} + (1-c) \cdot \sigma_{(prem,s)}$$

Years	Lob 1,5,6	Other Lobs
15	100%	100%
14	96%	100%
13	92%	100%
12	87%	100%
11	81%	100%
10	74%	100%
9	67%	92%
8	59%	81%
7	51%	67%
6	43%	51%
5	34%	34%



LoB	Premium
Motor vehicle liability	10,0%
Motor, other classes	8,0%
Marine, aviation, transport (MAT)	15,0%
Fire and other property damage	8,0%
Third-party liability	14,0%
Credit and suretyship	12,0%
Legal expenses	7,0%
Assistance	9,0%
Miscellaneous	13,0%

c = *fattore di credibilità*

$\hat{\sigma}$ = *deviazione standard*

T = *numero di anni di accadimento disponibili*

USP1 Premium Risk (3/3)

$$\sigma_{(prem,s,USP)} = c \cdot \boxed{\hat{\sigma}(\hat{\delta},\hat{\gamma})} \sqrt{\frac{T+1}{T-1}} + (1-c) \cdot \sigma_{(prem,s)}$$

$$\hat{\sigma}(\hat{\delta},\hat{\gamma}) = \exp\left(\hat{\gamma} + \frac{\frac{1}{2}T + \sum_{t=1}^{T} \pi_t(\hat{\delta},\hat{\gamma}) \cdot \ln\left(\frac{y_t}{x_t}\right)}{\sum_{t=1}^{T} \pi_t(\hat{\delta},\hat{\gamma})} \right)$$

y_t: danno aggregato del t-esimo anno di accadimento
x_t: premi di competenza del t

I **parametri** δ e γ sono stimati minimizzando la seguente quantità basata sulla **funzione di verosimiglianza** della distribuzione **LogNormale** (sotto il vincolo $\delta \in [0,1]$):

$$\sum_{t=1}^{T} \pi_t(\hat{\delta},\hat{\gamma}) \left(\ln\left(\frac{y_t}{x_t}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi_t(\hat{\delta},\hat{\gamma})} + \hat{\gamma} - \ln\left(\hat{\sigma}(\hat{\delta},\hat{\gamma})\right) \right)^2 - \sum_{t=1}^{T} \ln\left(\pi_t(\hat{\delta},\hat{\gamma})\right)$$

with

$$\pi_t(\hat{\delta},\hat{\gamma}) = \frac{1}{\ln\left(1 + \left((1-\hat{\delta}) \cdot \frac{\bar{x}}{x_t} + \hat{\delta}\right) \cdot e^{2 \cdot \hat{\gamma}}\right)}$$

USP1 Reserve Risk (1/2)

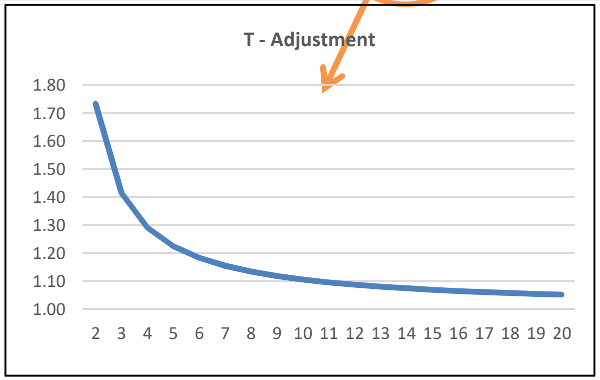
- Gli AD forniscono invece 2 metodologie per il Reserve risk (3 nel QIS5).
- Il Metodo 1 è simile a quello proposto per il Premium Risk. Per ogni segmento e per **ogni anno finanziario** è necessario che siano soddisfatte le seguenti ipotesi e che siano disponibili i seguenti dati:

Ipotesi	Dati
• Il costo atteso **dei sinistri già accaduti negli esercizi precedenti** (e non ancora liquidati), **valutato alla fine di un esercizio t** (**$BE_t^{(EP)}+X_t^{(EP)}$**), è proporzionale alla **riserva best estimate iniziale** (**$BE_{t-1}^{(EP)}$**); • La varianza **del costo sinistri** **$BE_t^{(EP)}+X_t^{(EP)}$** è **quadratica** rispetto alla riserva best estimate **$BE_{t-1}^{(EP)}$**; • Il costo aggregato dei sinistri $BE_t^{(EP)}+X_t^{(EP)}$ seguono una distribuzione **lognormale**; • Il metodo della **massima verosimiglianza** risulta appropriato.	- **Best estimate alla fine dell'anno e i pagamenti effettuati durante l'esercizio per i sinistri già accacuti all'inizio dell'anno (costo ultimo per sinistri riservati a fine anno non accaduti durante l'esercizio);** - **best estimate all'inizio dell'anno**; I **Dati** devono essere **disponibili per almeno 5 anni** di accadimento consecutivi. I **Dati** devono essere **rettificati** in base ai: - Somme da Recuperare da terzi e riass.

USP1 Reserve Risk (2/2)

$$\sigma_{Res,\,s,\,USP} = c \cdot \hat{\sigma}(\hat{\delta},\hat{\gamma}) \cdot \sqrt{\frac{T+1}{T-1}} + (1-c) \cdot \sigma_{Res,\,s}$$

Years	Lob 1,5,6	Other Lobs
15	100%	100%
14	96%	100%
13	92%	100%
12	87%	100%
11	81%	100%
10	74%	100%
9	67%	92%
8	59%	81%
7	51%	67%
6	43%	51%
5	34%	34%



LoB	Reserve
Motor vehicle liability	*9,0%*
Motor, other classes	*8,0%*
Marine, aviation, transport (MAT)	*11,0%*
Fire and other property damage	*10,0%*
Third-party liability	*11,0%*
Credit and suretyship	*19,0%*
Legal expenses	*12,0%*
Assistance	*20,0%*
Miscellaneous	*20,0%*

c = *fattore di credibilità*

$\hat{\sigma}$ = *deviazione standard*

T = *numero di anni di accadimento disponibili*

Deve essere minizzata la stessa funzione di Log-verosimiglianza fornita per lo USP1 del Premium Risk.

In questo caso:

- y_t è la **somma della best estimate alla fine dell'anno e dei pagamenti effettuati per i sinistri già accaduti all'inizio dell'esercizio (costo ultimo per sinistri riservati alla fine dell'esercizio non accaduti durante l'anno);**
- x_t è la **best estimate all'inizio dell'anno.**

USP2 Reserve Risk

- Per poter applicare il **metodo 2** previsto negli Atti Delegati, è necessario che siano soddisfatte le seguenti ipotesi e che siano diponibili i seguenti dati:

Ipotesi

- **I Pagamenti Cumulati di differenti AY sono stocasticamente independenti**;
- **I Pagamenti Incrementali impliciti di differenti AY sono stocasticamente independenti**;
- Il valore atteso dei pagamenti cumulati di un DY **è proporzionale** al pagamento cumulato del DY precedente;
- La Varianza dei pagamenti cumulati di un DY **è proporzionale** ai pagamenti cumulati del precedente DY;
- Per i sinistri aperti provenienti dal primo AY il loro ammontare alla fine dell'ultimo DY non è significativa **(coda immateriale)**

Data

- **Il triangolo Run-off dei pagamenti cumulati.**

I **Dati** devono essere **disponibili per almeno 5 anni** di accadimento consecutivi.
I **Dati** devono essere **aggiustati** in base ai:
- Somme da Recuperare da terzi e riass.

- La **deviatione Standard** è stimata come rapporto tra la radice quadrata del **MSEP** (determinata tramite la formula di Merz-Wuthrich) e la **BE** determinata tramite il **metodo Chain Ladder-PAID**. Tale stima è poi ponderata con il valore della deviazione standard ottenuta dall'approccio market-wide per mezzo della formula della credibilità.

Metodo 2 – Reserve Risk

- Questo modello è stato sperimentato dal JWG nell'attività di calibrazione dei parametri marketwide per il Reserve Risk.

Per il sotto-modulo **Reserve** gli Atti Delegati prevedono una seconda metodologia di stima del parametro $\sigma_{(USP,Res,s)}$, determinabile per ogni tipologia di segmento *s:*

Scarto quadratico medio della previsione

$$\boldsymbol{\sigma_{(USP,Res,s)}} = \boldsymbol{c} \cdot \frac{\boxed{\sqrt{\boldsymbol{MSEP}}}}{\underbrace{\sum_{i=0}^{I}\left(\widehat{C}_{i,J} - C_{i,J-i}\right)}} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{\sigma_{(MW,Res,s)}}$$

Fattore di credibilità

Riserva Stimata Totale mediante Chain ladder Paid

Standard Deviation EIOPA Market Wide

Data Requirements

Fasi del Processo

- Secondo il regolamento IVASS n.11 i requisiti per l'utilizzo dei parametri USP devo essere rispettati nel continuo.
- L'eventuale perdita dei requisiti può far venire meno l'autorizzazione all'utilizzo dei parametri specifici.

Data Quality Requirements	Applicazione per l'approvazione degli UPS	Approvazione del processo
I dati devono essere **completi, accurati** e **attendibili.** Utilizzo di dati **esterni**: - Trasparenza e verificabilità; - Medesimo profilo di rischio; - Evidenti prove statistiche di somiglianza. I dati devono essere **rappresentativi** del rischio a cui si è esposti per i successivi **12mesi**	Determinazione dei metodi utilizzati, supportati da motivazioni **solide** e **statisticamente accettabili**. Formulazione della richiesta e predisposizione di un piano relativo alle implicazioni, in termini di ***pianificazione del fabbisogno di capitale***, per l'eventualità in cui i parametri specifici non siano approvati. **Completezza** della richiesta, con possibilità di richiesta di ulteriori informazioni.	**Entro 6 mesi dalla verifica** della domanda, l'Autorità di Vigilanza comunica all'impresa quali fra i parametri standard di cui all'articolo 218 degli Atti delegati devono essere sostituiti da USP, in quanto il profilo di rischio dell'impresa **si discosta significativamente dalle ipotesi sottese al calcolo della Formula Standard.**

La Richiesta di Autorizzazione

- Le compagnie che intendono sostituire un insieme di parametri della standard formula con gli USP devono richiedere l'approvazione all'Autorità di Vigilanza del Paese in cui hanno sede legale (IVASS).
- La richiesta deve essere autorizzata dal Consigli di Amministrazione della società e deve essere redatta secondo le indicazioni fornite dall'EIOPA.

- La richiesta di autorizzazione all'utilizzo degli USP deve essere redatta dettagliando:
  - **la data** a partire dal quale gli USP verranno utilizzati;
  - Il **sottoinsieme di parametri** che devono essere sostituiti;
  - la **scelta dei metodi utilizzati** per la stima e relativo risultato;
  - i **test a supporto** della **validità** delle ipotesi sottostanti al modello utilizzato;
  - evidenze a prova del fatto che **i dati** siano **completi**, **accurati** ed **adeguati;**
  - **motivazioni** a supporto della scelta del modelli adottati per la stima e un'analisi comparata **rispetto** ai **modelli alternativi utilizzabili;**
  - **Il coinvolgimento della Funzione Attuariale nel processo di definizione dei parametri.**

L'Autorità di Vigilanza si riserva inoltre il diritto di richiedere alla compagnia informazioni addizionali rilevanti per il processo di approvazione.

L' Autorità di Vigilanza prevede inoltre la predisposizione di un piano relativo alle implicazioni, in termini di pianificazione del fabbisogno di capitale, per l'eventualità in cui i parametri specifici non siano approvati.

Data Quality

- Per ogni metodo standardizzato previsto da normativa si richiedono specifiche caratteristiche delle componenti.

Art. 5 del Regolamento n.11/2015

Standard di qualità dei dati:

«*L'impresa* ***assicura*** *il rispetto degli standard di qualità dei dati di cui all'articolo 219 degli Atti delegati in relazione a ciascun USP, indipendentemente dalla significatività del segmento per il quale esso si utilizza o dalla natura, portata e complessità dei rischi a cui si riferisce detto parametro*».

- [..] Affinché i dati siano considerati **completi**, **accurati** e **appropriati** è necessario che:
  - I rischi, ai quali i dati fanno fonte, siano omogenei, con una sufficiente profondità storica per individuare la presenza di eventuali tendenze;
  - Assenza di errori materiali nella raccolta;
  - Coerenti con le finalità di processo;
  - Elaborati in modo *trasparente* e *strutturato* (procedura documentata e standardizzata);
  - I dati e la loro produzione sono accuratamente documentati (fonte, caratteristiche, uso, qualità, aggiustamenti, ecc.);

Input Data – Metodo 1

- Dal punto di vista operativo è possibile definire catastrofale un sinistro sulla base di due distinti criteri:
  1. Se un sinistro è riconducibile ad un evento dichiarato catastrofale dalle autorità governative (ad es. Protezione Civile);
  2. Se un sinistro appartiene ad un evento con un'elevata frequenza sinistri valutata in base a specifiche soglie stabilite dalla Società o con un costo del danno superiore ad un importo prefissato (ad es. un sinistro RCA con costo superiore a 10 milioni).

Ai fini del calcolo della variabilità del **Loss Ratio** e del **Run-off Ratio** si necessita dei seguenti dati:

1) Costo atteso dei sinistri

Stima del costo atteso dei sinistri come somma dei pagamenti e delle Riserve Sinistri stimate con il criterio della **Best Estimate**. I valori sono distinti per generazione: generazione corrente per il Loss ratio e generazioni precedenti per il Run-off Ratio. Nel caso del Premium Risk le stime sono considerate sia al lordo che al netto della riassicurazione mentre nel Reserve Risk solamente al netto della riassicurazione.

Se tali dati **non sono** (totalmente o parzialmente) **disponibili**, è possibile sostituire il valore delle *Best Estimate* con quello delle Riserve Sinistri calcolate secondo i principi LOCAL GAAP, senza effettuare l'attualizzazione con la curva dei tassi risk-free pertinente. In ogni caso sarà necessario tenere sotto osservazione l'eventuale effetto di un riallineamento dei dati con l'utilizzo delle BEL.

2) *Premi di competenza*

Il dato dei premi di competenza dovrebbe essere ricavato sulla base dei premi di contabilizzati e la variazione della Riserva Premi (frazioni di premio o calcolata secondo il criterio della **Best Estimate)**.

Se tali dati non sono disponibili, per il calcolo dei premi di competenza verranno utilizzate le Riserve Premi LOCAL (comprensive di riserva rischi in corso e delle riserve integrative).

NOTA BENE

I dati relativi ai sinistri devono essere depurati da eventuali sinistri catastrofali nella misura in cui il rischio di tali sinistri è riflesso nei sottomoduli del rischio catastrofali del Non-Life and Health Underwriting Risk.

Input Data – Metodo 2

Triangoli di Run-Off

- Triangoli (Pagato + Riservato) di Run-Off con la **massima storicità** possibile.

  Il triangolo è costruito al netto dei recuperi e dell'effetto delle politiche di riassicurazione in essere nei 12 mesi successivi. In più:

- Il triangolo deve essere **comprensivo delle spese indirette ULAE**

  Nel caso in cui non ve ne sia considerazione, è opportuno riallocare sul triangolo tale posta, secondo i criteri attuali di ripartizione per generazione.

- Il triangolo deve tener conto delle **politiche di riassicurazione**

  Se le informazioni disponibili non consento la costruzione di un triangolo al netto di politiche riassicurative, è comunque necessario fornire un giusto grado di dettaglio sui singoli sinistri interessati dai trattati, al fine di poterli escluderne dai triangoli lordo riassicurazione.

Dati al netto della Riassicurazione

- Per la determinazione dei parametri USP del sotto-modulo Premium Risk e del sotto-modulo Reserve Risk, gli Atti Delegati prevedono che i dati di input siano coerenti con i trattati di riassicurazione in essere nei 12 mesi successivi la data di valutazione.

- La Società che intende richiedere l'autorizzazione ai parametri USP Premium Netto riassicurazione e Reserve, deve utilizzare le serie storiche dei Loss Ratio e Run-off Ratio e i triangoli di run-off dei pagamenti modificati secondo i seguenti approcci:

  - **Premium Risk Netto Riassicurazione**: i dati utilizzati devono necessariamente essere ricostruiti in coerenza con i trattati di riassicurazione in vigore nei 12 mesi successivi alla data di valutazione del SCR. Quindi la metodologia da adottare è del tipo "**AS IF**", cioè devono essere applicati retroattivamente le condizioni del trattato sia ai sinistri che ai premi conservati (**Tema di discussione**: come ci si comporta in caso di mix di portafoglio prospettico profondamente diverso rispetto a quello associato alle serie storiche dei dati empirici ?)

  - **Reserve Risk**: i dati utilizzati devono essere necessariamente al netto della Riassicurazione utilizzando però un approccio di tipo "**AS IS**" sia nel metodo I che nel metodo II. Tale approccio non prevede l'applicazione retroattiva dei trattati ma si limita a considerare i dati al netto della riassicurazione passata.

- Generalmente per i **trattati in quota** la ricostruzione dei dati non risulta particolarmente onerosa.

- Nel caso dei **trattati XL** (Premium Risk) invece l'applicazione del trattato in vigore nei 12 mesi successivi richiede la disponibilità puntuale dei dati relativi ai sinistri delle generazioni considerate nell'orizzonte temporale di analisi.

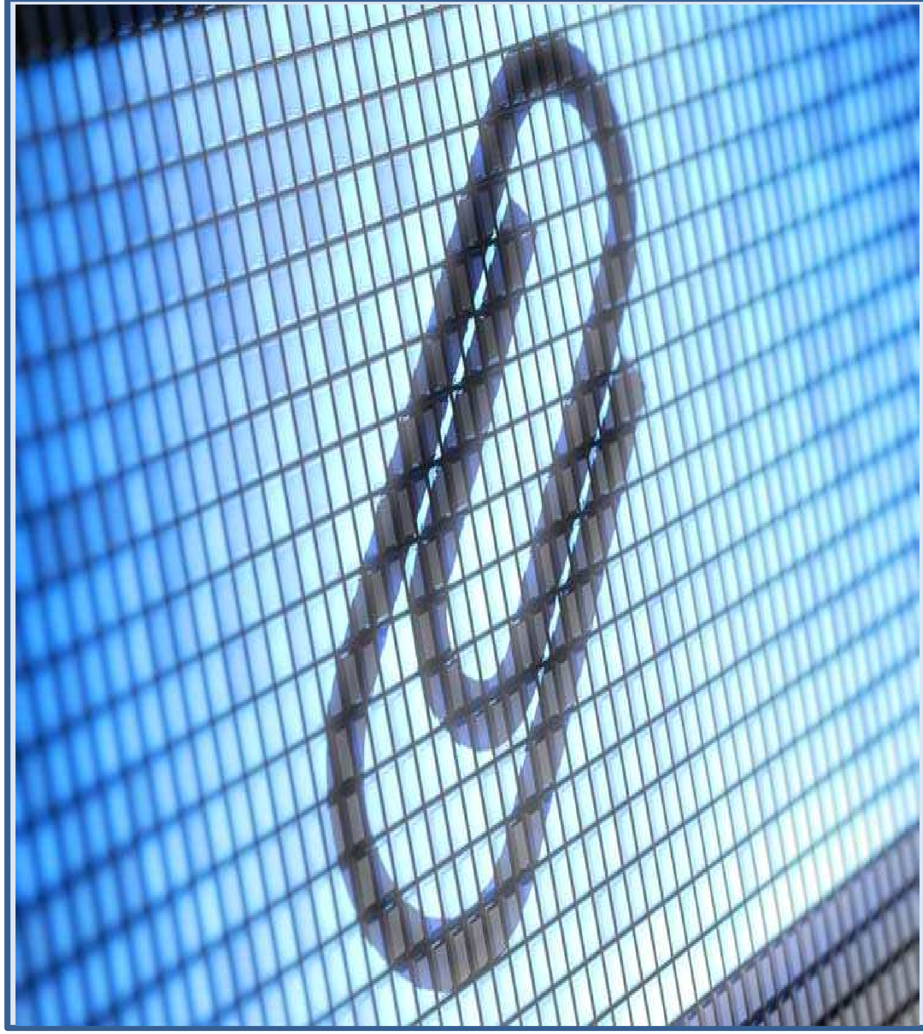
Grazie per l'attenzione!

prof. Nino Savelli
Ordinario di Teoria del Rischio
Email: nino.savelli@unicatt.it

prof. Diego Zappa
Associato di Statistica Assicurativa
Email: diego.zappa@unicatt.it

dott. Gian Paolo Clemente
Ricercatore, Docente di Tecnica Attuariale delle Assicurazioni Danni
Email: gianpaolo.clemente@unicatt.it

DE ANGELIS SAVELLI
& ASSOCIATI
www.deangelis-savelli.it

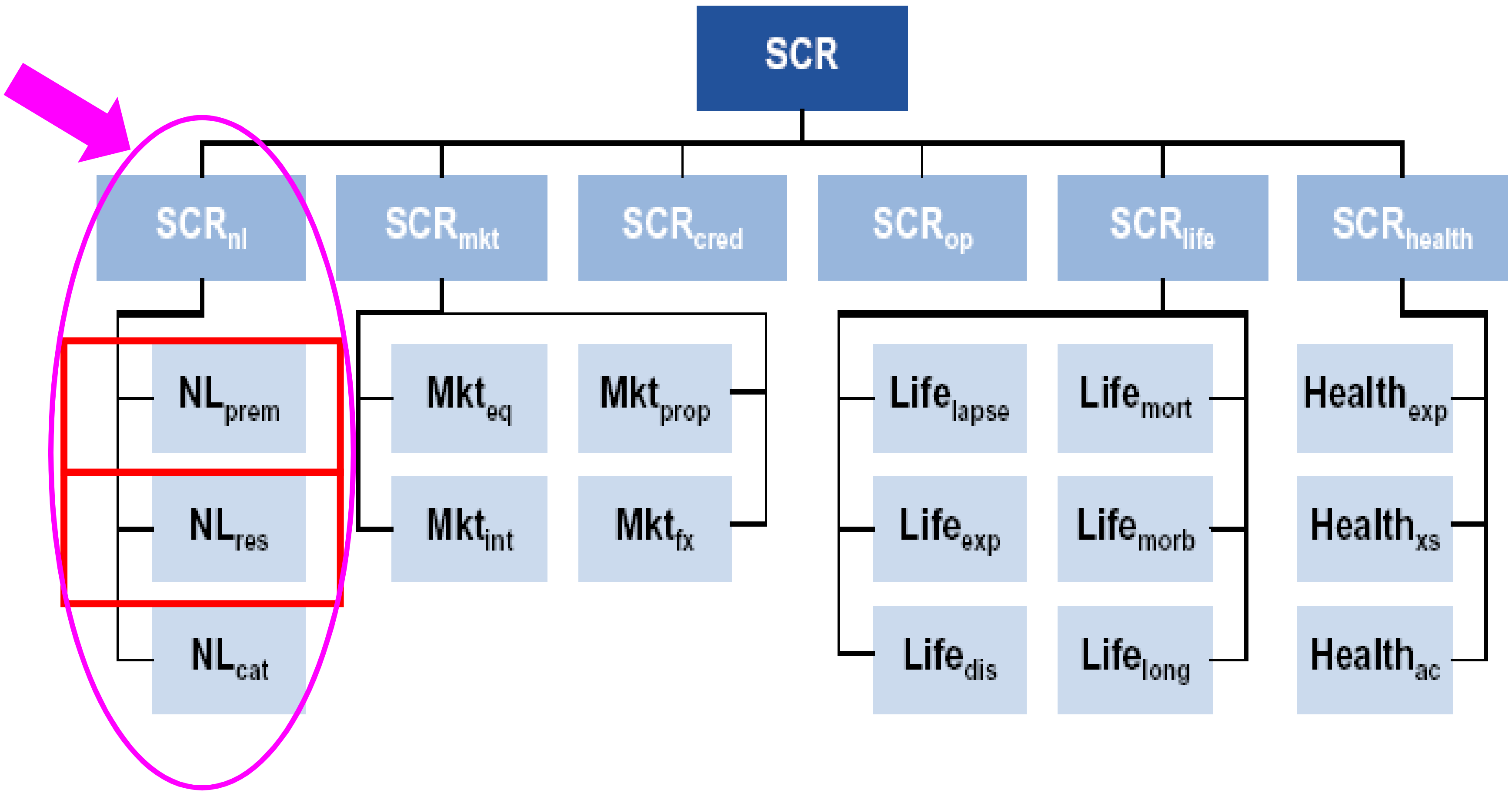


Appendici

Premium Risk e Reserve Risk nel QIS2

Lo schema del SCR

Lo schema del SCR secondo il QIS2 (maggio 2006)



Premium e Reserve Risk nel QIS2
(Aspetti principali)

- Premium e reserve risk vengono valutati separatamente (non sarà così negli Atti Delegati). La correlazione prevista tra i due moduli è pari a **0,5** (Il CAT risulta incorrelato con entrambi).

- Per il reserve risk è prevista un'unica metodologia di calcolo definita ***"market wide approach"*** basata su parametri prefissati dal CEIOPS.

- Per il premium risk sono previste due metodologie di calcolo: una definita ***"market wide approach"*** e una definita ***"undertaking-specific approach"*** basata su parametri specifici dell'impresa.

- Per il premium e per il reserve è prevista la possibilità di decurtare **l'expected profit (loss)** relativo rispettivamente agli utili e alle perdite del business dell'anno successivo e al risultato di run-off dell'anno successivo (anche quest'aspetto verrà rivisto nei QIS successivi).

- I parametri sono calibrati sulla base di una misura Tail Var al 99% (dichiarato dal CEIOPS equivalente ad un $VaR_{99,5\%}$).

La misura di rischio sarà poi successivamente definita pari ad un $VaR_{99,5\%}$.

Il QIS 2
Classificazione delle LoB nei rami Danni

- Classificazione delle linee di business proposta dal CEIOPS -
1. Accident and health (rami 1,2)
2. Motor, third party liability (rami 10,11,12)
3. Motor, other classes (rami 3,4)
4. Marine, aviation and transport (rami 5,6,7)
5. Fire and other property damage (rami 8,9)
6. Third party liability (ramo 13)
7. Credit and suretyship (ramo 14,15)
8. Legal expenses (ramo 17)
9. Assistance (ramo 18)
10. Miscellaneous non-life insurance (ramo 16)
11. Reinsurance

Il QIS 2
La Formula del Premium Risk

NL_{pr} requisito di capitale per il premium risk stand alone, senza considerare l'effetto dell'expected profitloss)

$$NL_{pr} = \rho(\sigma) \cdot P$$

P = Volume premi stimato per l'anno successivo net reins.
P_{LoB} = Volume premi (anno successivo) della LoB net reins.
$P_{LoB,gross}$ = Volume premi (anno successivo) della LoB gross reins.

$$\rho(\cdot) = \frac{0{,}99 - \phi\left(N_{0,99} - \sqrt{\log(x^2 + 1)}\right)}{0{,}01}$$

Funzione della standard deviation del portafoglio, ottenuta sulla base di una distribuzione LogNormale in corrispondenza di un $\text{TailVaR}_{99\%}$

σ= stima **market-wide o undertaking-specific** della standard deviation.

Ottenuta, come si mostrerà nel seguito, dall'aggregazione dei s delle singole LoB.

La Standard deviation complessiva

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{P^2}\sum_{r,c} CorrLob\_Prem^{rxc} \cdot P_r \cdot P_c \cdot \sigma_r \cdot \sigma_c}$$

CorrLob_Pre = Matrice Correlaz. tra i singoli rami

Due approcci alternativi utilizzabili:

Approccio Undertaking-specific

$$\sigma_{U,lob} = \sqrt{c_{lob}\sigma^2_{cr,lob} + (1-c_{lob})\sigma^2_{M,lob}}$$

Il σ è ottenuto attraverso una ponderazione tra la standard deviation calcolata sulla serie storica dei combined ratio (netto riass) e quella calcolata con l'approccio market-wide

Approccio Market Wide

$$\sigma_{lob} = sf_{lob} \bullet f_{lob}$$

sf_{LoB} = Size Factor

Considera la dimensione del ramo in funzione dell'ammontare dei premi

f_{LoB} = Volatility Factor

Considera un fattore di volatilità sistematico del ramo.

Matrice di correlazione tra LoB e Volatility Factors
(Premium Risk - MW)

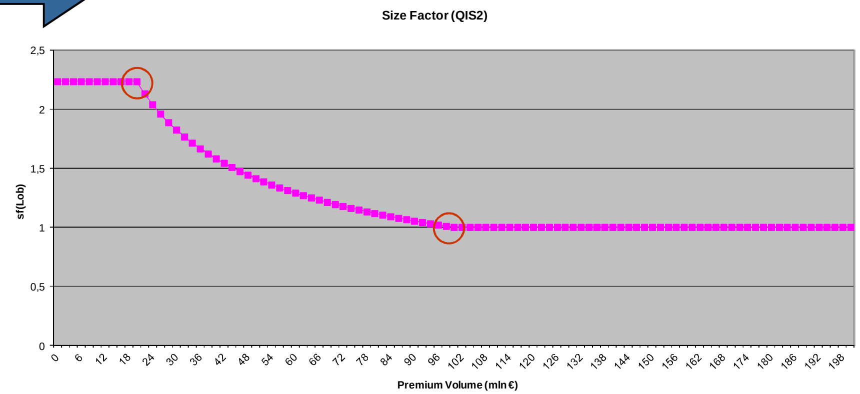
CorrLoB_matrix_Premium	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Accident & Health	100%										
Motor, third-party liability	25%	100%									
Motor, other classes	0%	50%	100%								
Marine, aviation and transport	0%	0%	50%	100%							
Fire and other property damage	0%	0%	50%	25%	100%						
Third-party liability	25%	0%	0%	0%	0%	100%					
Credit & suretyship	0%	0%	0%	0%	0%	75%	100%				
Legal expenses	50%	25%	0%	0%	0%	50%	75%	100%			
Assistance	0%	0%	50%	50%	50%	0%	0%	0%	100%		
Miscellaneous non-life insurance	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	100%	
Reinsurance	0%	0%	50%	50%	50%	50%	0%	0%	0%	0%	100%

Premium Risk Volatility											
$Premium_{LoB}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f_{LoB}	5,0%	12,5%	7,5%	15,0%	10,0%	25,0%	10,0%	15,0%	10,0%	15,0%	15,0%

Size Factors
(Premium Risk – MW)

Inoltre, qualora per la determinazione del SCR siano adottati i Volatility Factors indicati nel QIS2 (f_{LoB}), vanno considerati anche dei Size Factor **(sf_{LoB})** valididi per ogni LoB al fine di maggiorare l'effetto della volatilità in caso di dimensioni contenute del portafoglio della LoB (Premi <100 mln)

$$sf_{lob} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad P_{lob,gross} \geq 100\ m \\ \dfrac{10}{\sqrt{P_{lob,gross} \bullet 10^{-6}}} & \text{if} \quad 100\ m > P_{lob,gross} \geq 20\ m \\ \dfrac{10}{\sqrt{20}} & \text{otherwise} \end{cases}$$



- **per le Lob con volumi premi >100mln**

  sf_{LoB} = 1.00
- **per le Lob con volumi premi < 20mln**

  sf_{LoB} = 2.23

Standard deviation
Undertaking-Specific Approach

$$\sigma_{cr,lob} = \sqrt{\frac{1}{P_{lob}(j-1)} \sum_y P_{lob,y} \left(CR_{lob,y} - \mu_{lob}\right)^2}$$

μ_{lob} media ponderata dei CR degli ultimi 3 anni

La standard deviation di ogni LoB mediante una metodologia undertaking-specific è ottenuta in funzione della variabilità della serie storica dei combined ratio al netto della riassicurazione.

Tale standard deviation viene poi ponderata con il risultato del market-wide in funzione del numero di CR utilizzati:

$$\boxed{c_{lob}=0{,}2*\max(0, j-10)}$$

Nel caso l'impresa ha un numero di CR inferiore o uguale a 10 (c_{lob}=0), viceversa in caso di 15 CR si utilizza pienamente il σ undertaking-specific (non sarà così nei QIS successivi)

Expected surplus
(Premium risk)

L'Expected Surplus relativo al business futuro è ottenuto sulla base della formula seguente:

$$NL\_PL_{prem} = \boxed{(100\% - \mu)} \cdot P$$

Dove il valore m, che rappresenta la media ponderata delle medie μ_{lob} dei combined ratio relativi ai singoli rami, ottenute considerando un numero di combined ratio compreso tra 3 e 5.

$$\mu = \frac{\sum_{lob} \mu_{lob} P_{lob}}{P}$$

Il valore dell'Expected surplus sarà sottratto dal Basic SCR (requisito complessivo ottenuto aggregando i requisiti dei diversi rischi considerando la correlazione).

Il QIS 2
La Formula del Reserve Risk

NL_{res} requisito di capitale per il reserve risk stand alone, senza considerare l'effetto dell'expected profit/loss

$$NL_{res} = \rho(\sigma) \cdot PCO$$

PCO = Riserva Sinistri Totale net reins.
PCO_{LoB} = Ris.Sinistri della LoB net reins.
$PCO_{LoB,gross}$ = Ris.Sinistri della LoB gross reins.
La Riserva considerata è pari a BE+RM

$$\rho(\cdot) = \frac{0{,}99 - \phi\left(N_{0,99} - \sqrt{\log(x^2+1)}\right)}{0{,}01}$$

Funzione della standard deviation del portafoglio (identica a quella del premium)

σ= stima **market-wide** della standard deviation.

Ottenuta, come si mostrerà nel seguito, dall'aggregazione dei s delle singole LoB.

La standard deviation complessiva
(Reserve Risk)

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{PCO^2}\sum_{r,c} CorrLob\_Res^{rxc} \cdot PCO^r \cdot PCO^c \cdot \sigma^r \cdot \sigma^c}$$

CorrLob_Res = Matrice Correlaz. tra i singoli rami (uguale a quella per il Premium Risk)

Un unico approccio alternativo utilizzabile (market-wide):

$$\sigma_{lob} = sf_{lob} \bullet f_{lob}$$

sf_{LoB} = Size Factor

Considera la dimensione del ramo in funzione dell'ammontare delle riserve

f_{LoB} = Volatility Factor

Considera un fattore di volatilità sistematico del ramo (diverso da quello del premium).

Il Size Factor
(Reserve Risk)

Per la determinazione del SCR del reserve risk occorre dunque considerare oltre ai Volatility Factors indicati nel QIS2 **(f_{LoB}), anche dei Size Factor (sf_{LoB})** validi per ogni LoB al fine di maggiorare l'effetto della volatilità in caso di dimensioni contenute del portafoglio della LoB (Riserve <100 mln)

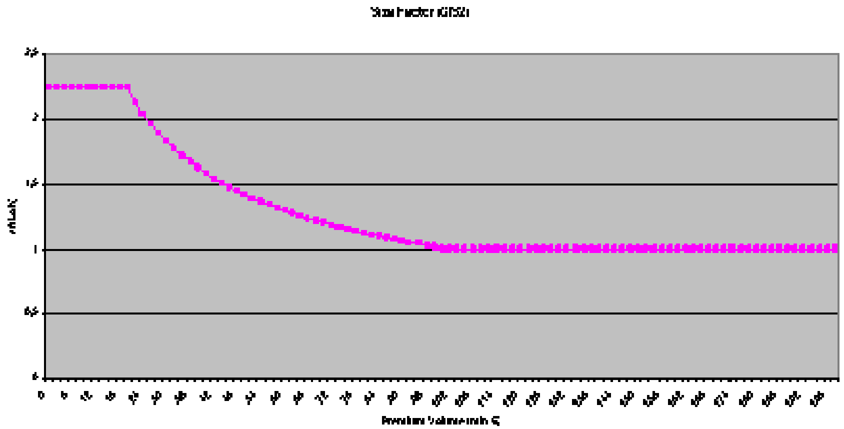
$$sf_{LoB} = \begin{cases} 1 & se \;\; PCO_{lob,gross} \geq 100\,m \\ \dfrac{10}{\sqrt{PCO_{lob,gross} \cdot 10^{-6}}} & se \; 100\,m > PCO_{lob,gross} \geq 20\,m \\ \dfrac{10}{\sqrt{20}} & altrimenti \end{cases}$$

per le Lob con riserve >100mln

sf_{LoB} = 1.00

per le Lob con riserve < 20mln

sf_{LoB} = 2.23



Matrice di correlazione tra LoB e Volatility Factors (Reserve Risk)

CorrLoB_matrix_Premium	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Accident &Health	100%										
Motor, third-party liability	25%	100%									
Motor, other classes	0%	50%	100%								
Marine, aviation and transport	0%	0%	50%	100%							
Fire and other property damage	0%	0%	50%	25%	100%						
Third-party liability	25%	0%	0%	0%	0%	100%					
Credit & suretyship	0%	0%	0%	0%	0%	75%	100%				
Legal expenses	50%	25%	0%	0%	0%	50%	75%	100%			
Assistance	0%	0%	50%	50%	50%	0%	0%	0%	100%		
Miscellaneous non-life insurance	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	100%	
Reinsurance	0%	0%	50%	50%	50%	50%	0%	0%	0%	0%	100%

Reserve Risk Volatility											
$Reserve_{LoB}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f_{LoB}	15,0%	15,0%	7,5%	15,0%	10,0%	20,0%	10,0%	10,0%	20,0%	20,0%	20,0%

Expected surplus (o deficit) derivante dal risultato di run-off dell'anno successivo

L'Expected surplus, per il **reserve risk**, è ottenuto sulla base della seguente formula: **(tale valore andrà sottratto al BSCR complessivo SCR=BSCR-NL_PL+RPS)**

$$NL\_PL_{res} = \mu \cdot PCO$$

dove m rappresenta la stima del valore atteso del risultato di run-off nell'anno successivo ed è ottenuto come media ponderata dei μ_{lob} relativi ai singoli rami

$$\mu = \frac{\sum_{lob} \mu_{lob} PCO_{lob}}{PCO}$$

con μ_{lob} pari a una percentuale a del rapporto tra Risk Margin e Riserve (stimate al 75° percentile)

$$\mu_{lob} = \alpha \frac{RM_{lob}}{PCO_{lob}}$$

con α percentuale attesa di riserva che verrà liquidata nell'anno seguente.

Tale valore può essere stimato in maniera accurata sulla base dell'esperienza dell'impresa. (una prima stima, abbastanza semplice, proposta dal CEIOPS è pari a 1/D con D durata media delle riserve sinistri).

Il QIS2
Il requisito per il Non-Life UWR

$$SCR_{NL} = \sqrt{\sum_{rxc} CorrNL^{rxc} \cdot NL^{r} \cdot NL^{c}} = \sqrt{\left(NL_{pr}^{2} + NL_{res}^{2} + NL_{CAT}^{2} + 2 \cdot 0{,}5 \cdot NL_{pre} \cdot NL_{res}\right)}$$

SCR_{NL} requisito di capitale per il non-life underwriting risk (non considera expected profit and loss).

Tale requisito verrà aggregato con il requisito ottenuto dagli altri sotto moduli:

$$BSCR = \sqrt{\sum_{rxc} CorrSCR^{rxc} \cdot SCR^{r} \cdot SCR^{c}}$$

CorrNL=	*Reserve Risk*	*Premium Risk*	*CAT Risk*
Reserve Risk	1		
Premium Risk	0.5	1	
CAT Risk	0	0	1

Dal requisito finale vengono sottratti gli expected profits (or losses) relativi a premium e reserve risk

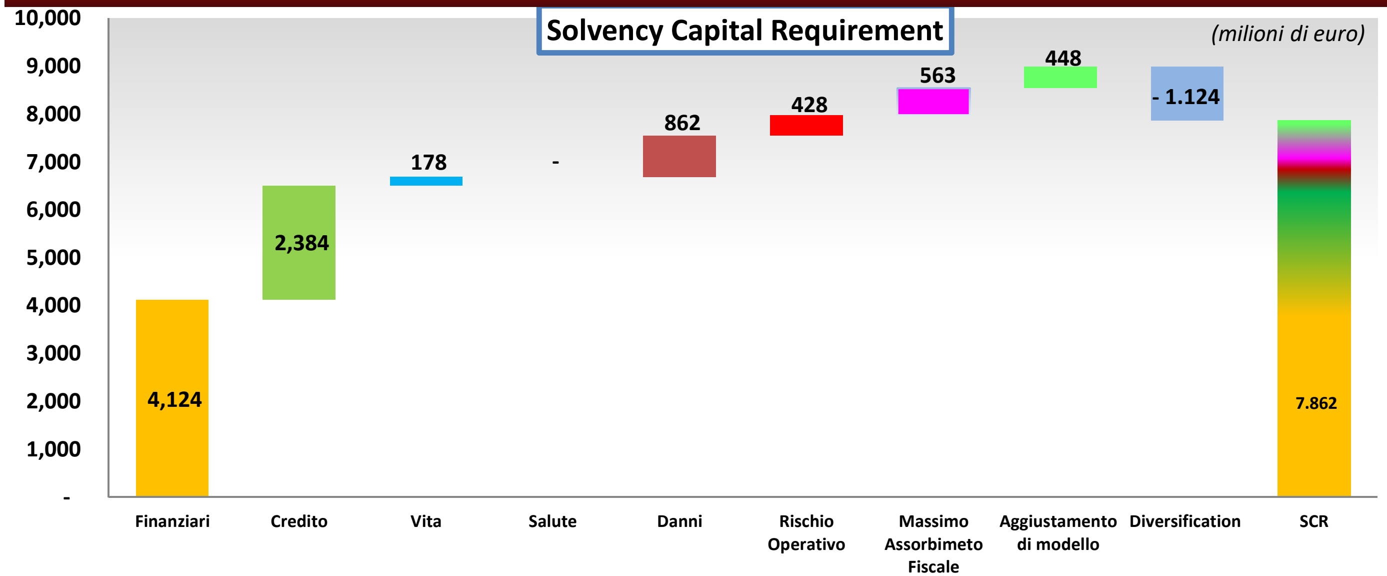
$$SCR = BSCR - RPS - NL\_PL$$

$$NL\_PL = NL\_PL_{prem} + NL\_PL_{res}$$

Composizione del BSCR e del SCR di alcune compagnie Italiane

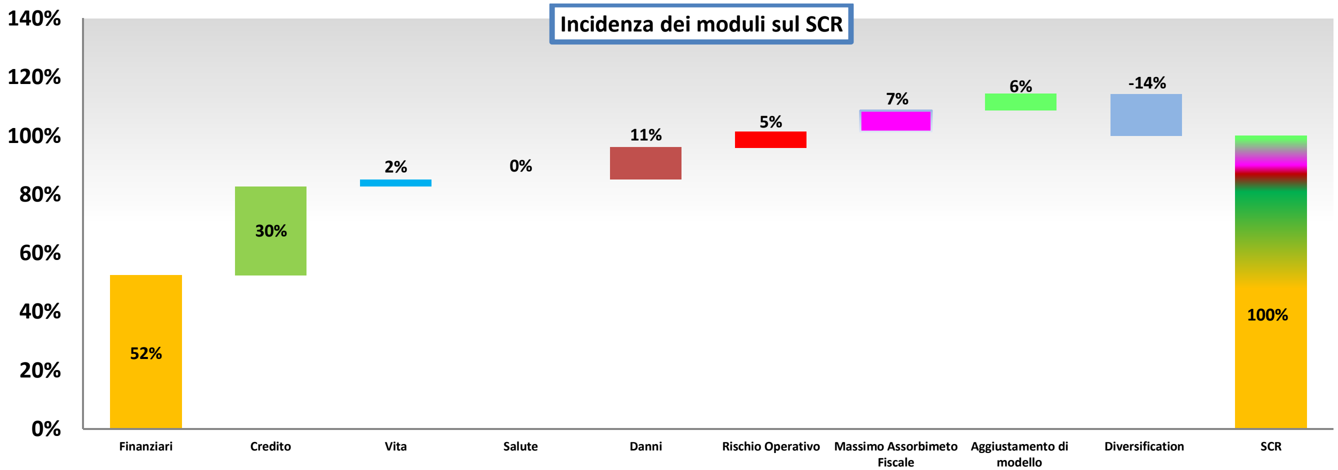
Generali Italia

Composizione del SCR al 31/12/2016



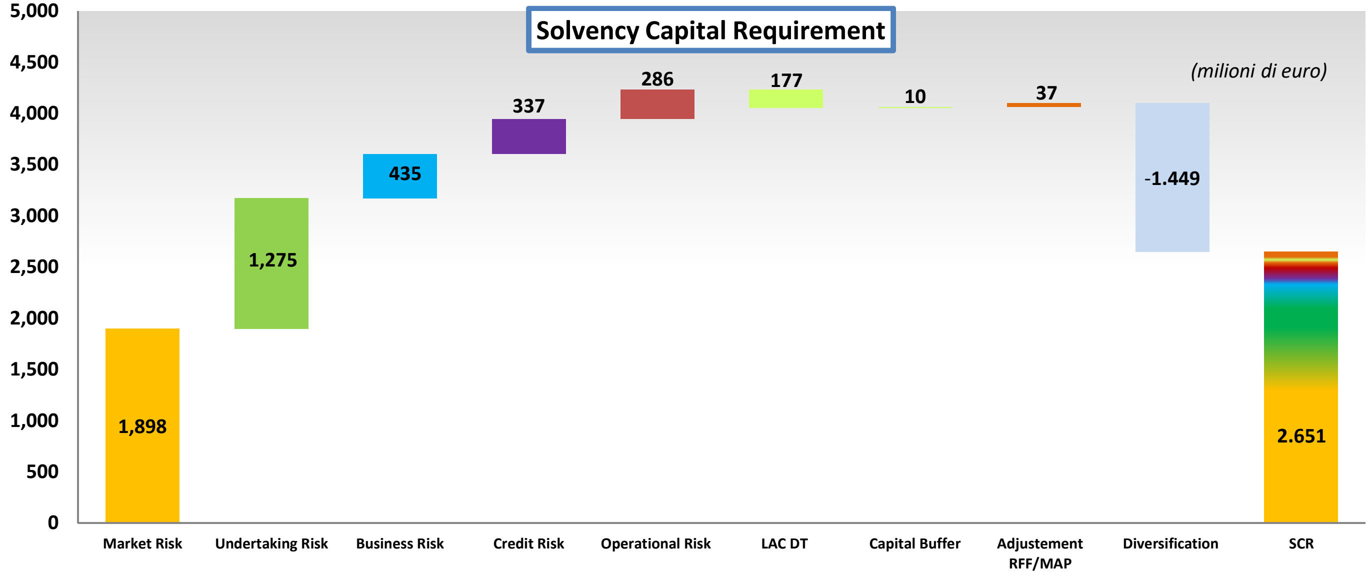
Fonte: SFCR Generali Italia S.p.a.

La Compagnia Generali Italia ha impiegato un **Modello Interno** per la determinazione del **SCR**, individuando in questo modo rischi a cui è esposta la Compagnia.



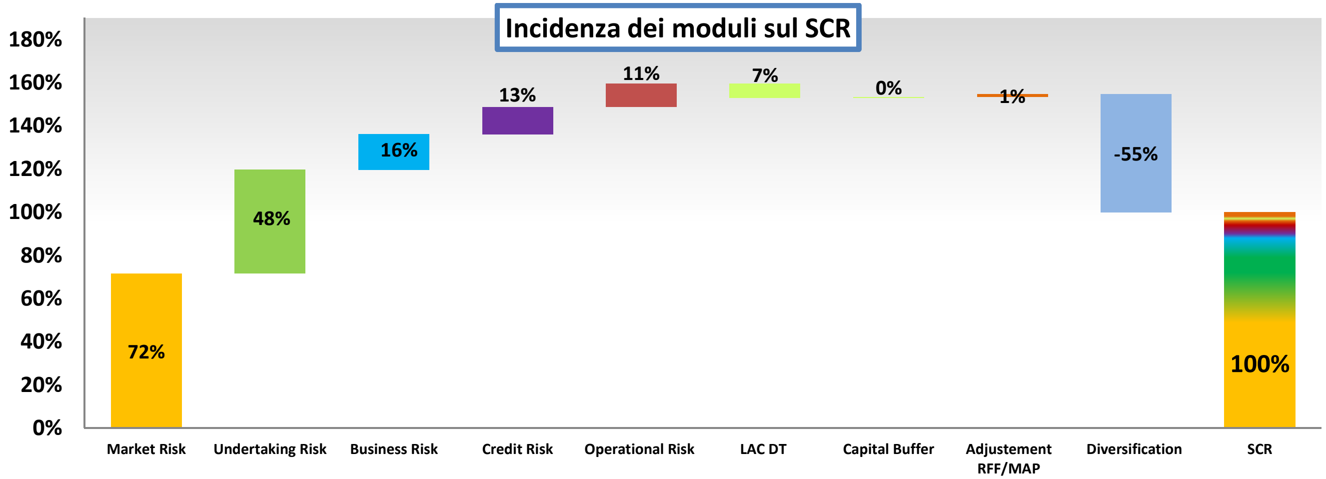
Allianz

Composizione del SCR al 31/12/2016



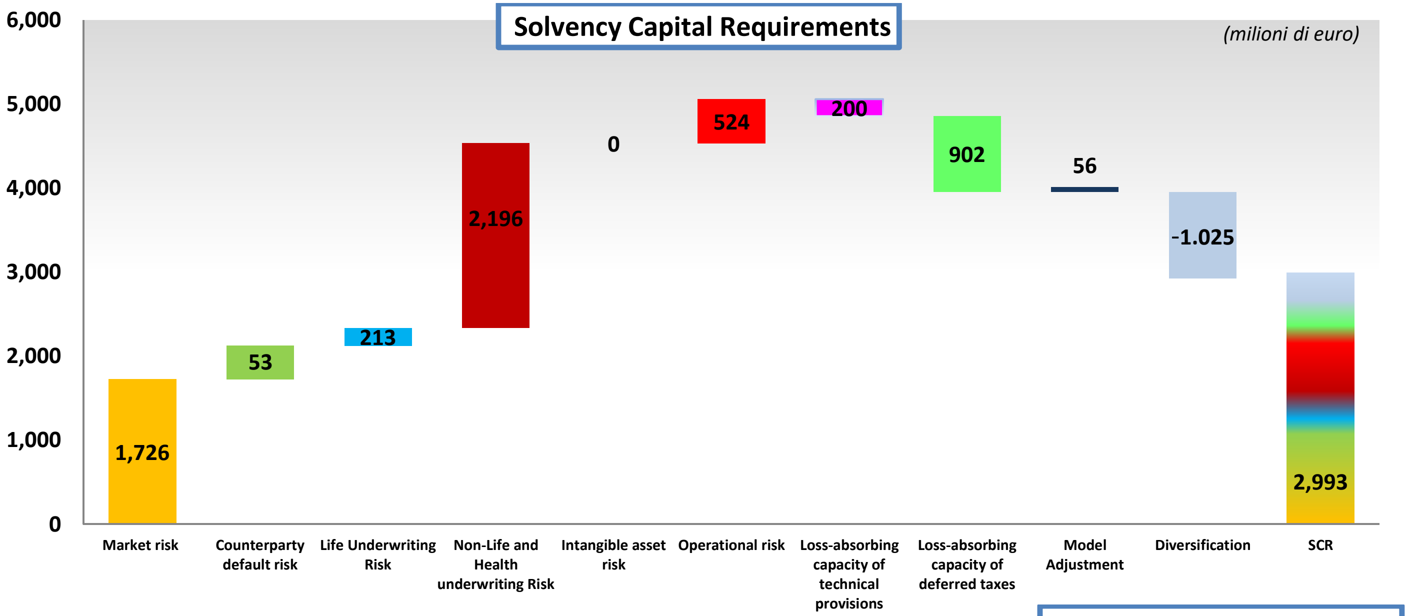
Fonte: SFCR Allianz S.p.a.

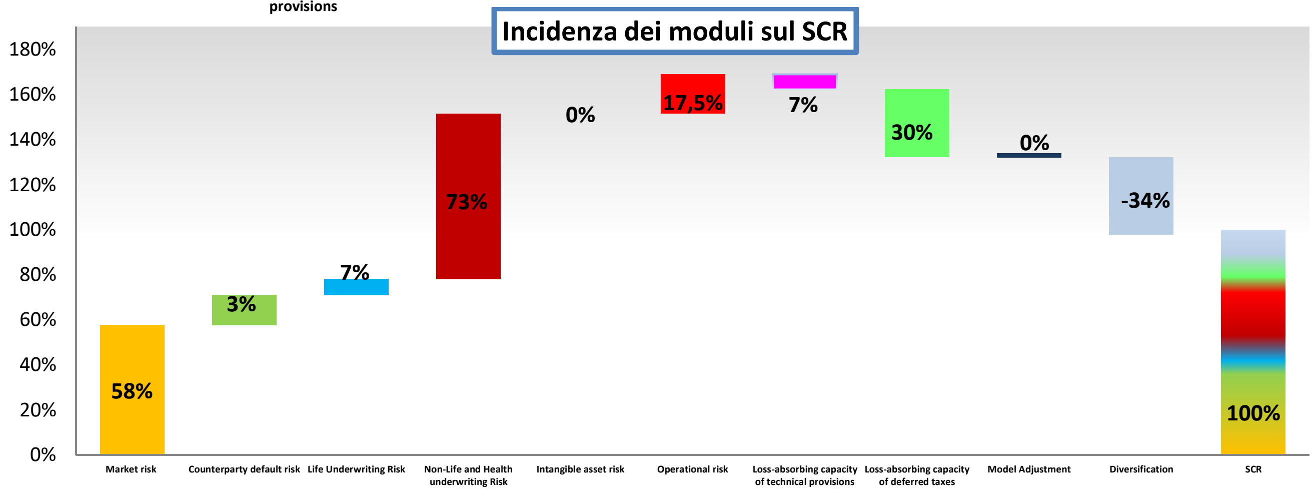
Allianz ha utilizzato un **Modello Interno** per la determinazione del SCR, identificando i rischi quantificabili considerati più appropriati a descrivere il profilo di rischio della Compagnia.
Il modulo **Undertaking Risk** comprende tutti rischi di sottoscrizione della Compagnia (Life, Non-Life ed Health UW Risk).



UNIPOLSAI
Composizione del SCR al 31/12/2016

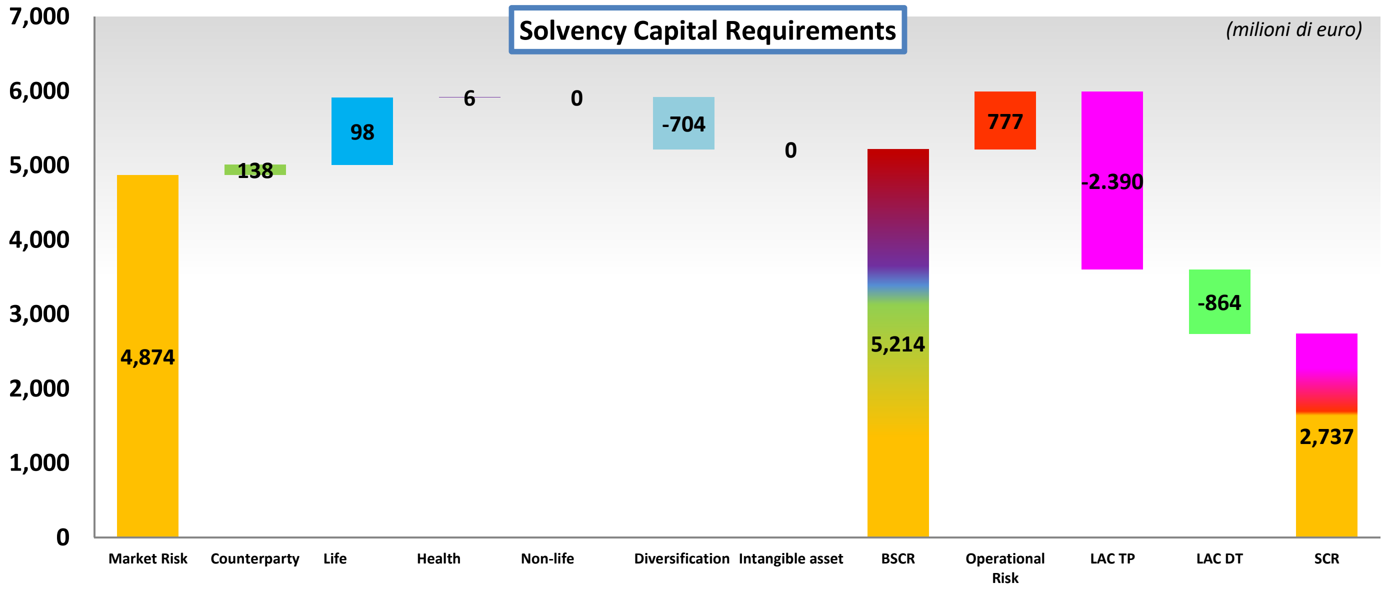
Fonte: SFCR UNIPOLSAI

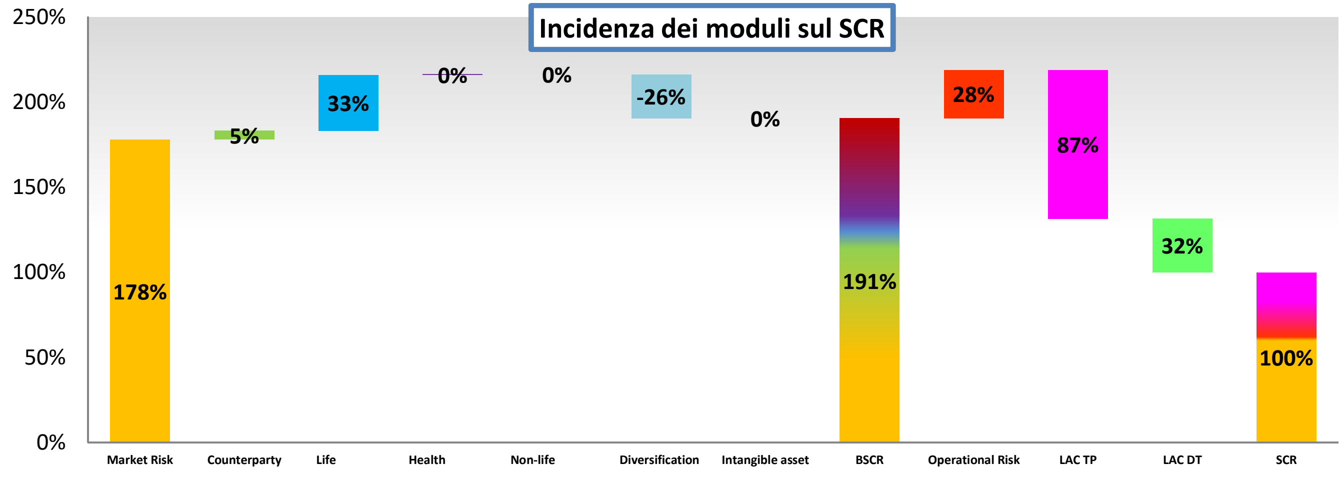




Poste Vita
Composizione del SCR al 31/12/2016

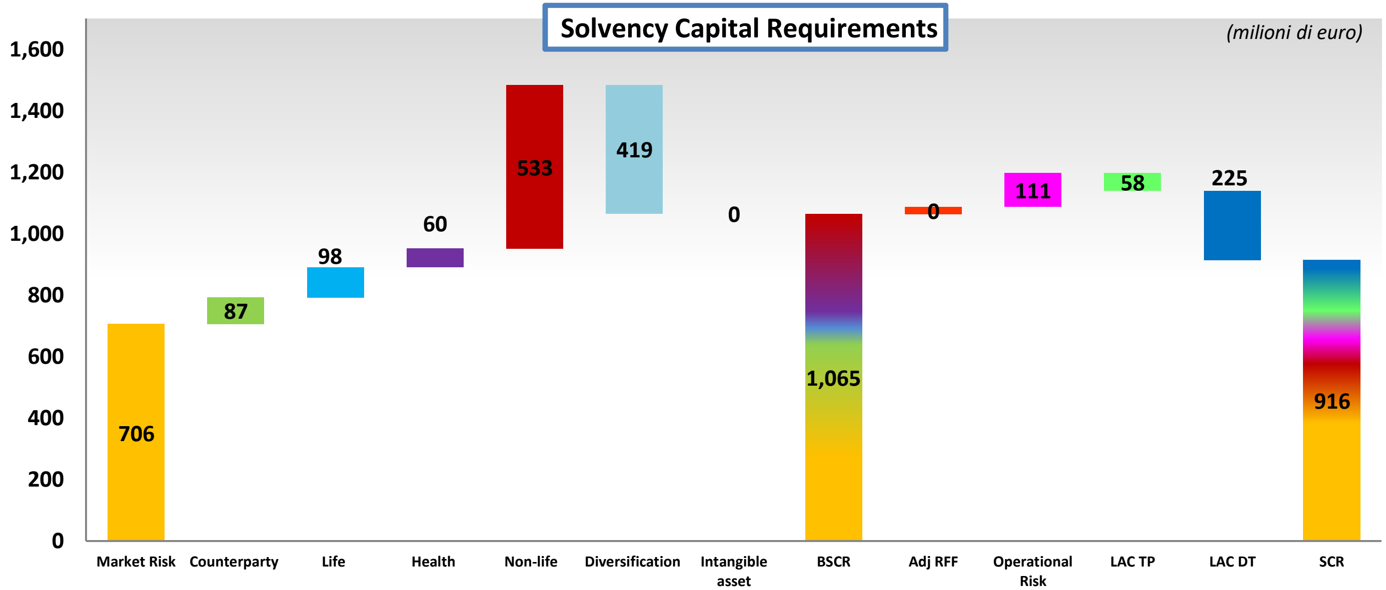
Fonte: SFCR Poste Vita

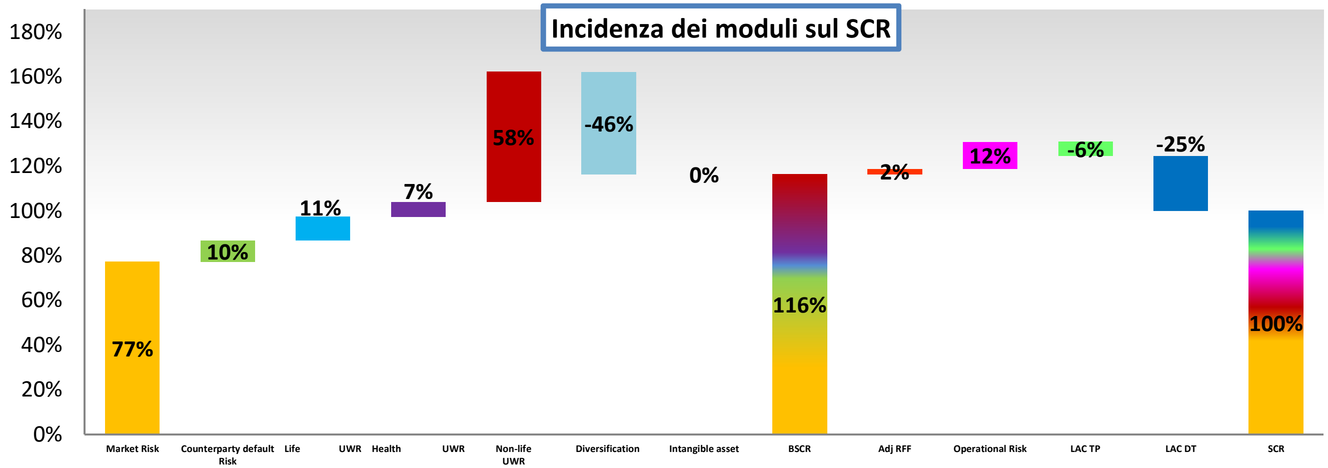




Cattolica Assicurazioni
Composizione del SCR al 31/12/2016

Fonte: SFCR Cattolica Assicurazioni

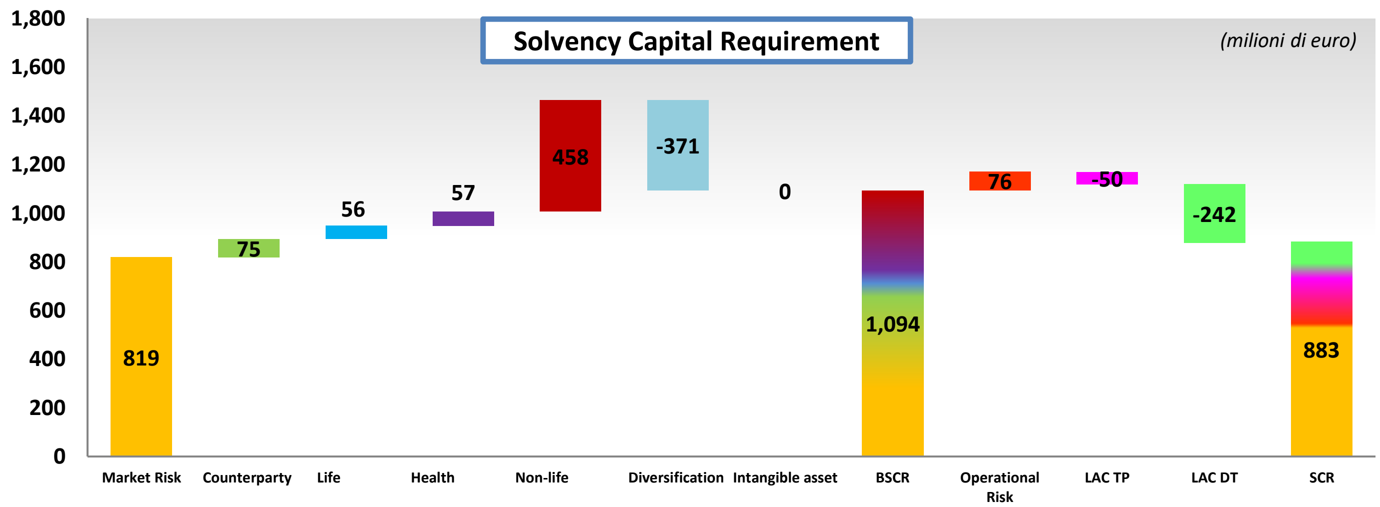


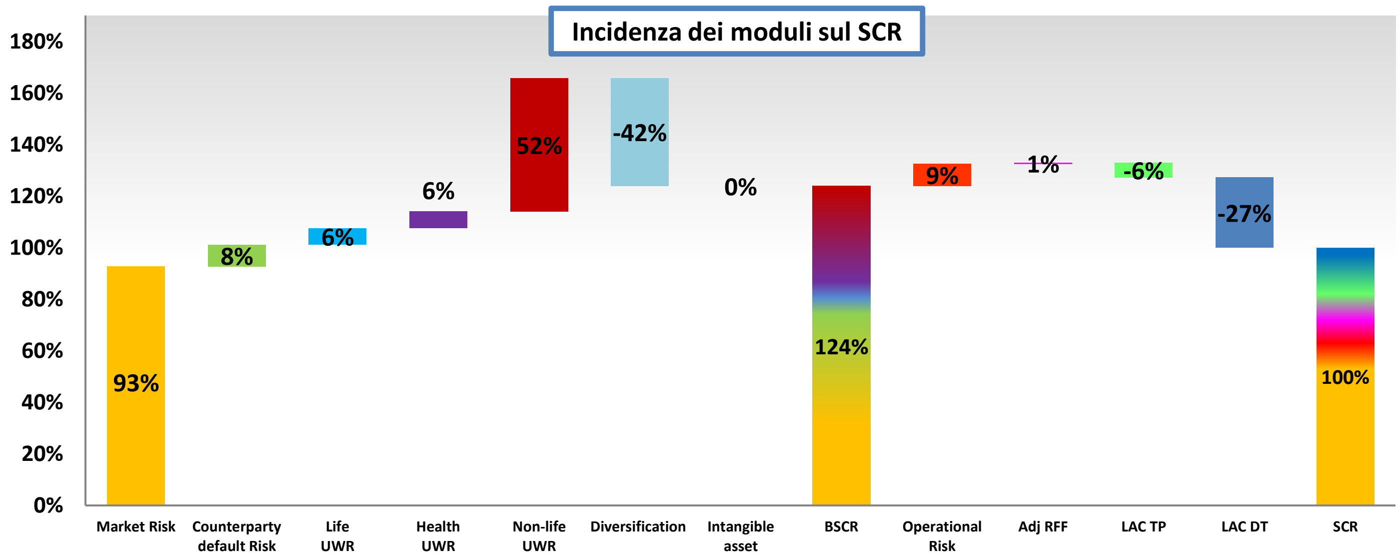


REALE MUTUA

Composizione del SCR al 31/12/2016

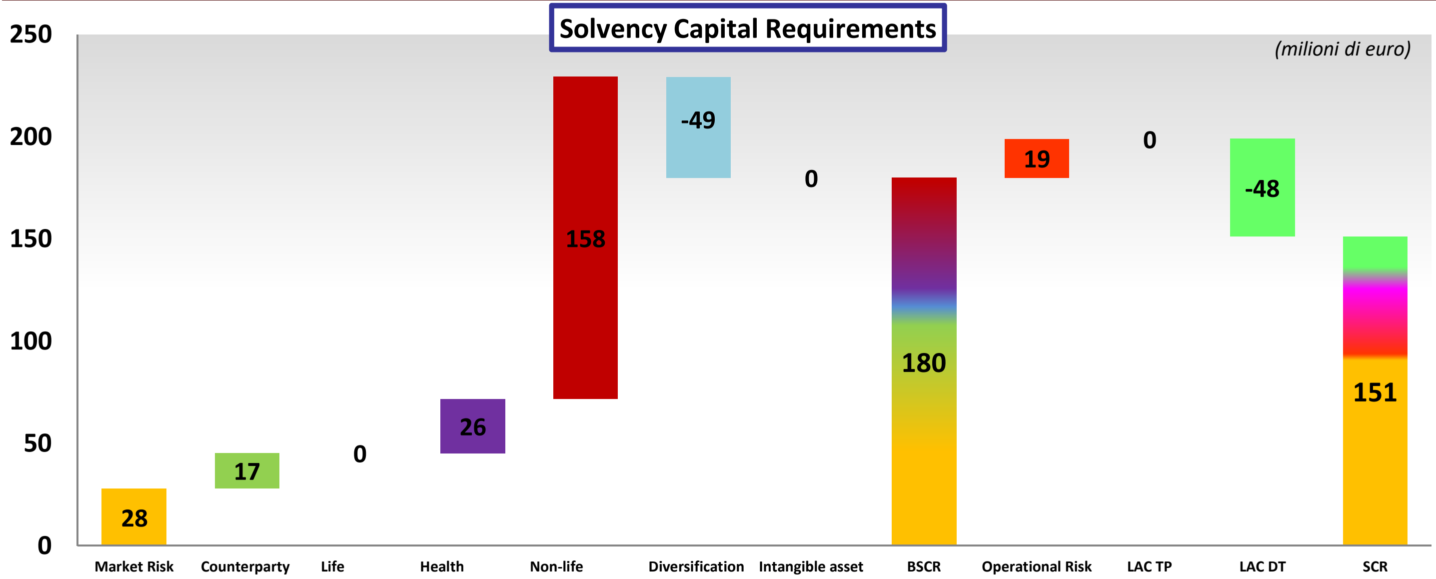
Source: SFCR REALE MUTUA

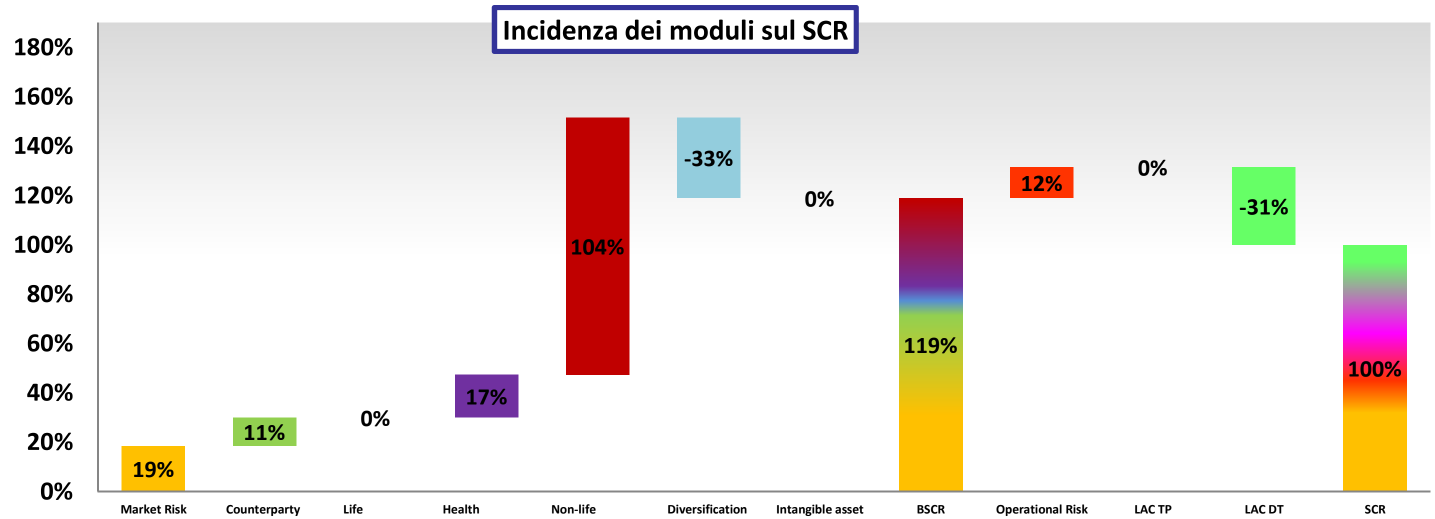




AVIVA Italia
Composizione del SCR al 31/12/2016

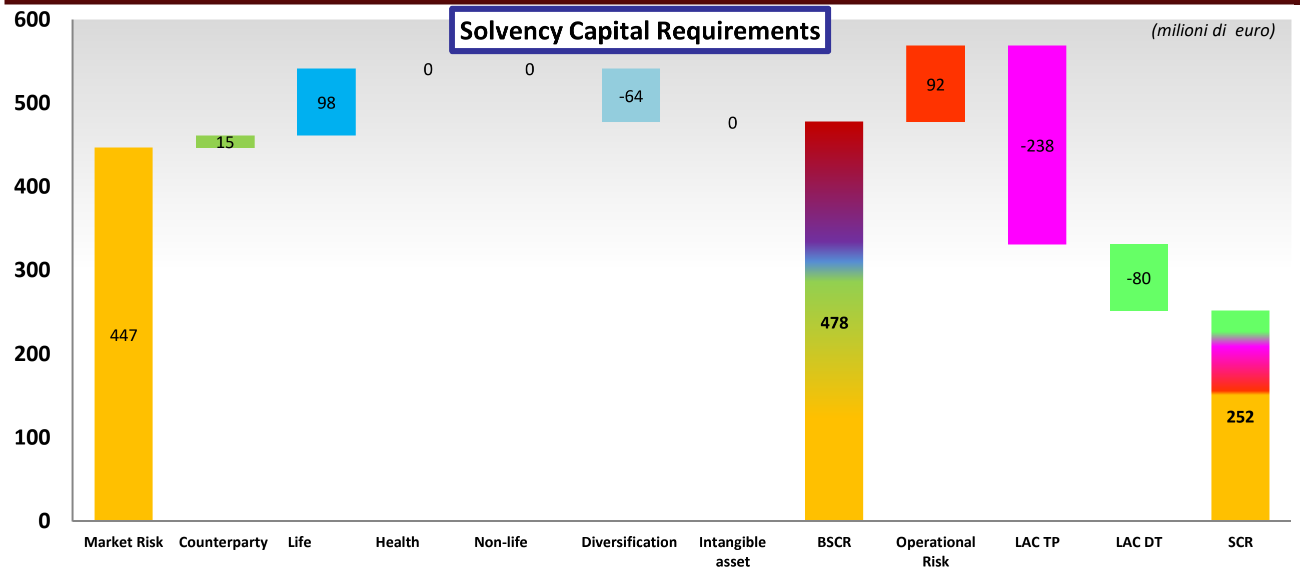
Fonte: SFCR AVIVA Italia

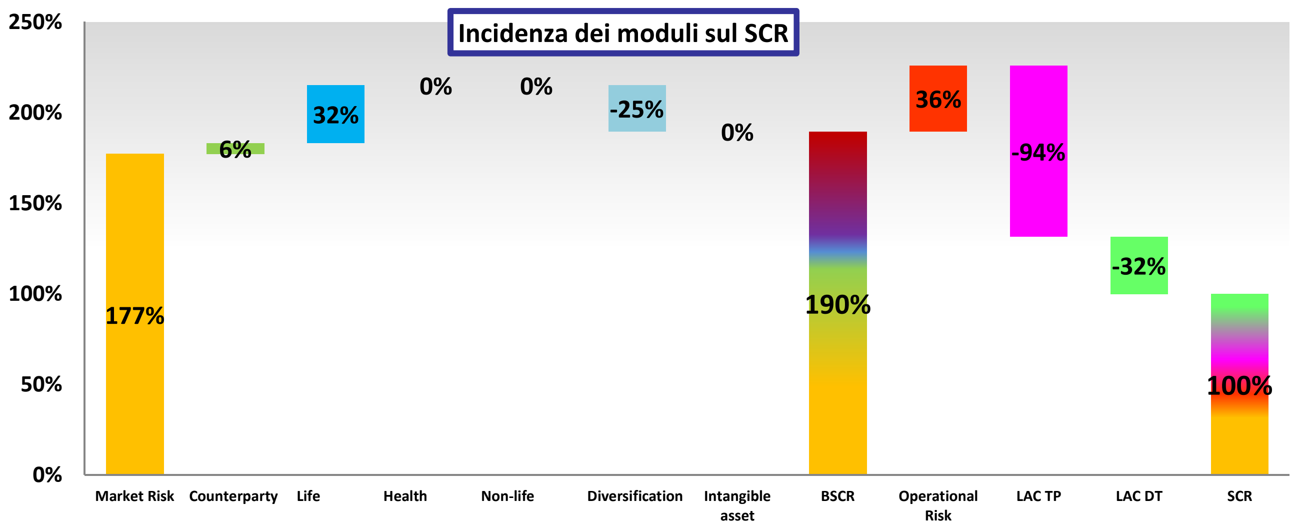




AVIVA SpA
Composizione del SCR al 31/12/2016

Fonte: SFCR AVIVA S.p.a





I Modelli Lineari Generalizzati

Il modello lineare stocastico (richiami)

Sia $y_i = \beta_0 + x_{i1}\beta_1 + \cdots + x_{ip}\beta_p + e_i$

ovvero $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{E}$

Assunzioni

1- $E(\boldsymbol{\varepsilon})=\mathbf{0}$

2- $E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')=\sigma^2\mathbf{I}$

3- X matrice non stocastica con $r(\mathbf{X})=p+1$

4- $Cov(\boldsymbol{\varepsilon},X)=\mathbf{0}$

5- $\boldsymbol{\varepsilon}\sim N(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I}_n)$

Stima dei parametri: Metodo della Massima Verosimiglianza

Obiettivo: stimare β del modello massimizzando la funzione di verosimiglianza

$$L(\boldsymbol{\beta},\sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\sigma^2\boldsymbol{I}|^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'(\sigma^2\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\right)$$

Soluzione : $\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ (coincidente con OLS)

Proprietà degli stimatori

Posto $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{Xb}$

– $s^2 = \frac{1}{n}(\mathbf{e}'\mathbf{e})$ (dove s^2 è la stima di σ^2)

– $\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = s^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$

– $E(\hat{\beta}) = \beta$

– $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2\frac{n-p-1}{n} \neq \sigma^2$

– $\hat{\beta} \sim N(\beta,\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$

Introduzione ai GLM

Alcuni **<u>problemi</u>** non affrontabili nell'approccio classico

- presenza di componenti stocastiche con legge di distribuzione diversa dalla normale
- coinvolgimento di variabili risposta con supporto discreto (es.poisson, binomiale ecc.) o di cui è vincolato il campo di variazione (ad es. una proporzione varia tra 0 e 1)
- varianza della variabile risposta variabile in funzione del valore medio condizionato
- necessità di uniformare l'approccio metodologico per intere famiglie di distribuzioni:

⇨ generalizzazione a modelli legati alla famiglia esponenziale: i <u>modelli lineari generalizzati (GLM)</u>

Si ipotizzi:

- di osservare un fenomeno Y la cui distribuzione risulti appartenere alla famiglia esponenziale (*EF*: vedi in seguito)
- che ad ogni osservazione sia associato un vettore di p osservazioni (non stocastiche) relative ai livelli cui sono state fissate le p variabili da interpretare come esplicative del fenomeno

Lo scopo che ci prefiggiamo ora è dare risposta al seguente quesito:

Come impostare una metodologia che consenta di esprimere Y come una funzione di combinazioni lineari delle p variabili?

La famiglia esponenziale

Sia $\Phi=\{f(\cdot;\xi) : \xi \in \Xi \subseteq \Re^p\}$ una classe parametrica di funzioni di densità f dove ξ è un parametro (o un vettore di parametri).

Tale classe costituisce una famiglia esponenziale se i suoi elementi sono del tipo

$$f(y,\xi) = q(y)\cdot exp\left(\sum_{i=1}^{r} \psi_i(\xi)\, t_i(y) - \tau(\xi)\right)$$

dove $t_i(y)$ per i=1,…,r e $q(y)$ sono funzioni che non dipendono da ξ mentre $\psi_i(\xi)$ per i=1,…,r e $\tau(\xi)$ sono funzioni che dipendono solo da ξ.

In *forma canonica* se può essere scritta come

$$f(y,\theta) = q(y)\cdot exp\left(\sum_{i=1}^{r} \theta_i\, t_i(y) - b(\theta)\right)$$

I parametri θ_i vengono detti *parametri canonici.*

la sua fgm è $m(t) = \exp\{b(\theta + t) - b(\theta)\}$

La famiglia esponenziale sovradispersa

Un importante parametrizzazione delle famiglie esponenziali viene indicata con la seguente notazione

$$Y \sim EF\{b(\theta), a(\phi)\}$$

dove $a(\phi)$ è in genere espresso come rapporto del tipo $a(\phi)=\kappa/\omega$, dove ϕ verrà inteso come parametro di scala.

In particolare κ viene chiamato parametro di (sovra)dispersione e ω è il peso associato alla informazione i-esima. Se i dati sono in forma non raggruppata si porrà $\omega=1$ e $a(\phi)\equiv\phi$.

La f.d.d. di Y (qui di seguito riportata in forma canonica e uniparametrica) sarà esprimibile in forma canonica come

$$f(y,\theta) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y,\phi)\right)$$

In particolare la sua fgm è $m(t) = \exp\left\{\frac{b(\theta + t a(\phi)) - b(\theta)}{a(\phi)}\right\}$ da cui si ricava

$$\mu=E(Y)=b'(\theta) \quad \text{e} \quad Var(Y)=b''(\theta)\cdot a(\phi) = \frac{\partial b'(\theta)}{\partial \theta}\, a(\phi) = \frac{\partial \mu}{\partial \theta}\, a(\phi)$$

Posto $b''(\theta)=V(\mu)$, detta funzione varianza, si ha $Var(Y)= V(\mu)\cdot a(\phi)$

Esempi

Binomiale

$f(y,\pi) = \binom{n}{y}\pi^y(1-\pi)^{n-y}$ ovvero

$f(y,\pi) = \binom{n}{y}exp[(yln\pi - yln(1-\pi)+nln(1-\pi)]$

$\kappa=1$, $\omega=1$, $a(\phi)=1$, $\theta=ln\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)$, $b(\theta)= n\ ln(1+exp(\theta))$, $c(y,\phi)=\binom{n}{y}$

$\mu=n\frac{e^\theta}{1+e^\theta}$, $V(\mu)=Var(Y)=n\frac{\mu}{n}(1-\frac{\mu}{n})$

N.B. - la funzione varianza dipende dalla media di *Y*.

- la funzione $ln\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)$ viene chiamata logit
- la frazione y/n ha distribuzione appartenete alla EF con lo stesso θ ma con $b(\theta)= ln(1+exp(\theta))$ e $a(\phi)=1/n$

Poisson

$f(y,\lambda) = (y!)^{-1}\ exp(yln\lambda-\lambda)$

$f(y,\lambda) = exp[yln\lambda-\lambda - ln(y!)]$

$\kappa=1$, $\omega=1$, $a(\phi)=1$, $\theta=ln\lambda$

$b(\theta)= exp(\theta)$, $c(y,\phi) = -ln(y!)$

$\mu=exp(\theta)=\lambda$, $V(\mu)=Var(Y)=\mu$

N.B. la funzione varianza dipende dalla media di *Y*.

Gamma

$f(y,\xi) = f(y;g,1/\lambda) = \frac{1}{\Gamma(g)}(1/\lambda)^g y^{g-1}e^{-(1/\lambda)y}$

Ipotizzando g (parametro di scala) noto, si ha che $\theta = -\frac{1}{\lambda g} = -\frac{1}{\mu}$.

Ponendo $\frac{1}{\lambda} = \frac{g}{\mu}$ si ha $f(y;g,\frac{g}{\mu}) = \frac{1}{\Gamma(g)}(g/\mu)^g y^{g-1}e^{-(g/\mu)y}$
da cui si può mostare che $\kappa=g^{-1}$, $\omega=1$, $a(\phi)=1/g$,

$b(\theta)= -ln(-\theta)$ $\quad c(y,\phi)=gln(gy)-lny-ln\Gamma(g)$

$\mu= -1/\theta = \lambda g$, $V(\mu)a(\phi)=Var(Y)=b''(\theta)a(\phi)= \mu^2 \cdot g/g = \mu^2$

N.B. -la funzione varianza dipende dalla media di *Y*.
- il coefficiente di variazione pari a 1/g è costante
- Se $g=1$ si ottiene il modello esponenziale
- Se $1/\lambda = 2$ si ha una χ^2 con g gdl

Tabella delle funzioni associate alle principali distribuzioni appartenenti alla EF

Distribution	Range of y	$V(\mu)$	Var(y)	$V'(\mu)$
Normal	$(-\infty,+\infty)$	1	ϕ	0
Inverse Gaussian	$(0,+\infty)$	μ^3	$\phi\mu^3$	$3\mu^2$
Gamma	$(0, +\infty)$	μ^2	$\phi\mu^2$	2μ
Negative binomial	$0(1)\infty$	$\mu+k\mu^2$	$\mu+k\mu^2$	$1+2k\mu$
Poisson	$0(1)\infty$	μ	μ	1
Binomial(m)	$0(1)m/m$	$\mu(1-\mu)$	$\mu(1-\mu)/m$	$1-2\mu$

Struttura di un GLM (1)

A titolo esemplificativo si richiamino le considerazioni relative al modello lineare classico gaussiano. In quel contesto, dato il vettore di osservazioni *p*-dimensionale, $\mathbf{x}_i$, si è proceduto con l'identificazione e la stima del predittore lineare

$$\eta_i = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$$

da interpretarsi come modello in grado di restituire una stima della media condizionata a $\mathbf{x}_i$ della v.c. Y_i caratterizzata dalla seguente distribuzione

$Y_i \sim N(\mu_i,\sigma^2)$ dove $\mu_i=\eta_i$ essendo $\eta_i=\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$

In tale espressione è evidente che il legame funzionale tra il predittore η_i e il valore medio μ_i di Y_i è la funzione *identità*.

Obiettivo dei GLM è estendere il risultato precedente anche al caso in cui:

si vogliano definire altre forme di legame tra predittore lineare η_i e valor medio μ_i, espresso da una funzione monotona $g(\mu_i)=\eta_i$, chiamata *funzione legame* e dove il legame tra η_i e le variabili esplicative **verrà inteso come predittore <u>lineare</u> delle variabili *X*** e quindi del tipo $\eta_i=\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ **.**

Struttura di un GLM (2)

In un GLM si formuleranno le seguenti ipotesi

a) le osservazioni $y_1,\ldots,y_n$ sono determinazioni indipendenti dalle v.c. $Y_1,\ldots,Y_n$

b) ciascuna osservazione proviene da una $EF\{b(\theta_i)\,,\,a(\phi_i)\}$ con fdd

$$f(y,\theta) = c(y,\phi)\cdot\exp\left(\frac{y\theta-b(\theta)}{a(\phi)}\right)$$

e con $E(Y_i)=\mu_i=b'(\theta_i)$ e $a(\phi_i)$ in genere definita come $a(\phi_i)=\kappa/\omega_i$ dove κ è noto come parametro di dispersione e ω_i sono noti. Se i dati su cui si lavora non sono raggruppati allora $\omega_i=1\ \forall i$. In tal caso si porrà $a(\phi_i)=\kappa\equiv\phi_i$

c) esiste una funzione legame $g(\mu_i)=\eta_i=\mathbf{x}_i'\beta$ monotòna e differenziabile

d) la funzione $g(\cdot)$ e il parametro di dispersione κ sono comuni a tutte le determinazioni Y_i mentre il fattore *peso* ω può variare da individuo a individuo

In forma schematica un GLM sarà caratterizzato dai seguenti elementi:

-	struttura stocastica	$Y_i \sim EF\{b(\theta_i)\,,\,a(\phi_i)\}$ con $\mu_i=b'(\theta_i)$
-	legame	$g(\mu_i)=\eta_i$
-	predittore lineare	$\eta_i=\mathbf{x}_i'\beta$

GLM e la riserva sinistri

Si considerino
Variabile dipendente: i pagamenti incrementali P_{ij}
Variabili esplicative: periodo di origine, periodo di sviluppo
Pesi (se disponibili) per ogni anno di origine: numero di sinistri denunciati.

In generale si ipotizzi che $P_{i,j} \sim EF\left\{b(\theta_{i,j}), a\left(\phi_{i,j}\right)\right\}$ con $a\left(\phi_{i,j}\right) = \frac{\kappa}{\omega_{i,j}}$

La f.d.d. (di seguito riportata in forma canonica e uniparametrica) è esprimibile come

$$f(P_{i,j}, \theta_{i,j}) = exp\left(\frac{P_{i,j}\,\theta_{i,j} - b(\theta_{i,j})}{a\left(\phi_{i,j}\right)} + c\left(P_{i,j}, \phi_{i,j}\right)\right)$$

Nell'ambito della riserva stocastica tipicamente

- struttura stocastica $P_{i,j}$ ~ Poisson($\mu_{i,j}$)
- predittore lineare $\eta_{i,j} = c + a_i + b_j$
- legame $\ln\left(\mu_{i,j}\right) = \eta_{i,j}$

Il modello fattoriale e l'ipotesi poissoniana

Si considerino i parametri $\mu_0,\ldots\mu_T > 0$ e $\gamma_0,\ldots\gamma_T > 0$. Si assuma che $P_{i,j} = \mu_i \gamma_j$ e che $P_{i,j} \sim \wp(\mu_i \gamma_j)$ $\forall$i,j dove

μ_i : valore atteso dei pagamenti per anno di generazione

γ_j : tasso di liquidazione per anno di sviluppo. In particolare si ha

$$\frac{E[P_{i,j}]}{E[P_{i,j-1}]} = \frac{\gamma_j}{\gamma_{j-1}}$$

Per garantire l'identificabilità posto $\sum_{j=0}^{T} \gamma_j = 1$ si deduce che

$E[P_{i,j}] = \mu_i \cdot \gamma_j = P_{i,j}$ Var($P_{i,j}$)= $\mu_i \cdot \gamma_j$ = $P_{i,j}$

$E[C_{i,j}] = \mu_i \sum_{h=0}^{j} \gamma_h$

$E[C_{i,T}] = \mu_i$

Stante l'assunzione parametrica, i parametri μ_i e γ_j possono essere stimati con la massima verosimiglianza

$$L(\mu_0, \ldots, \mu_T; \gamma_0, \ldots, \gamma_T | \Theta) = \prod_{i+j \leq T} \left(\frac{\exp(-\mu_i \gamma_j) (\mu_i \gamma_j)^{P_{i,j}}}{P_{i,j}!} \right)$$

GLM: analisi dei residui

Così come nei modelli lineari anche nei GLM è possibile valutare l'adeguatezza del modello attraverso l'analisi dei residui.
L'estensione di residuo standardizzato dei modelli lineari classici al contesto dei GLM avviene attraverso l'introduzione dei residui di Pearson

$$e_i^P = \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{V(\hat{\mu}_i)/\omega_i}}$$

MSEP con GLM (1) (v. Charpentier, 2010)

Come già descritto in precedenza è rilevante calcolare

$$MSEP_{C_{i,T}|\Theta_T}\left(\sum_{i=1}^{T}\hat{C}_{i,T}^{GLM}\right)=E\left[\left(\sum_{i=1}^{T}\hat{C}_{i,T}^{GLM}-\sum_{i=1}^{T}C_{i,T}\right)^2\middle|\Theta_T\right]$$

e scomporlo nelle componenti di errore di processo ed errore di previsione. Con riferimento alla generazione i-esima, $\hat{C}_{i,T}^{GLM}=\sum_{j\le T-i+1}P_{i,j}+\sum_{j>T-i+1}\hat{P}_{i,T}^{GLM}$ dove il primo addendo sono quantità note così come, condizionatamente al set informativo Θ_T ovvero *dato* il modello di previsione GLM, anche $\sum_{j>T-i+1}\hat{P}_{i,T}^{GLM}$ sono da leggersi come *stime* (non *stimatori*). Stesso discorso vale per $C_{i,T}$, dove però il secondo addendo contiene i pagamenti incrementali ignoti e *sono* variabili casuali. Quindi

$$MSEP_{C_{i,T}|\Theta_T}\left(\sum_{i=1}^{T}\hat{C}_{i,T}^{GLM}\right)=E\left[\left(\sum_{i+j>T}\hat{P}_{i,j}^{GLM}-\sum_{i+j>T}P_{i,j}\right)^2\middle|\Theta_T\right]=$$

$$=E\left[\left(\sum_{i+j>T}\hat{P}_{i,j}^{GLM}-\sum_{i+j>T}E(P_{i,j})+\sum_{i+j>T}E(P_{i,j})-\sum_{i+j>T}P_{i,j}\right)^2\middle|\Theta_T\right]$$

da cui si ha

$$MSEP_{C_{i,T}|\Theta_T}\left(\sum_{i=1}^{T}\hat{C}_{i,T}^{GLM}\right)=Var\left(\sum_{i+j>T}P_{i,j}\right)+\left(\sum_{i+j>T}\left(\hat{P}_{i,j}^{GLM}-E[P_{i,j}]\right)\right)^2$$

dove il doppio prodotto si annulla mentre il secondo addendo non è pari a zero essendo la stima $\hat{P}_{i,j}^{GLM}$ non necessariamente pari a $E[P_{i,j}]$. Ma per l'asserita indipendenza tra i $P_{i,j}$ e stante la relazione tra varianza e funzione varianza in un GLM si ottiene

$$=\sum_{i+j>T}Var(P_{i,j})+\left(\sum_{i+j>T}\left(\hat{P}_{i,j}^{GLM}-E[P_{i,j}]\right)\right)^2=\sum_{i+j>T}\frac{\phi}{\omega}V(P_{i,j})+\left(\sum_{i+j>T}\left(\hat{P}_{i,j}^{GLM}-E[P_{i,j}]\right)\right)^2$$

MSEP con GLM (2)

La difficoltà sta nello stimare la II componente. Si cerchi quindi l'unconditional MSEP, ovvero lo si studi al variare di tutti i possibili set informativi che hanno dato luogo al triangolo e quindi al variare di tutte le possibili stime ottenibili con il modello GLM. Quindi $\hat{P}_{i,j}^{GLM}$ assumerà l'accezione di variabile casuale. Si ha quindi

$$E\left[MSEP_{C_{i,T}|\Theta_T}\left(\sum_{i=1}^{T}\hat{C}_{i,T}^{GLM}\right)\right]=\sum_{i+j>T}\frac{\phi}{\omega}V(P_{i,j})+E\left[\left(\sum_{i+j>T}\left(\hat{P}_{i,j}^{GLM}-E[P_{i,j}]\right)\right)^2\right]$$

Ma

$$E\left[\left(\sum_{i+j>T}\left(\hat{P}_{i,j}^{GLM}-E[P_{i,j}]\right)\right)^2\right]=$$

$$=E\left[\sum_{i+j>T}\left(\hat{P}_{i,j}^{GLM}-E[P_{i,j}]\right)^2+\sum_{i+j>T,m+n>T,i+j\neq m+n}\left(\hat{P}_{i,j}^{GLM}-E[P_{i,j}]\right)\left(\hat{P}_{m,n}^{GLM}-E[P_{m,n}]\right)\right]$$

$$=\sum_{i+j>T}\mathrm{Var}\left(\hat{P}_{i,j}^{GLM}\right)+\sum_{i+j>T,m+n>T,i+j\neq m+n}\mathrm{Cov}\left(\hat{P}_{i,j}^{GLM},\hat{P}_{m,n}^{GLM}\right)$$

MSEP con GLM (3)

Usando il metodo delta, secondo cui sviluppando $g(X)$ in serie di Taylor nell'intorno di $x=\mu$ si ha

$$g(X) = g(\mu) + (X - \mu)g^{'}(\mu) + r$$

Considerando trascurabile i termini di ordine superiore al I si ha:

$$Var[g(X)] \cong [g^{'}(\mu)]^2 Var(X)$$

assumendo la presenza di un legame logaritmico e quindi della relazione $\hat{P}_{i,j}^{GLM} = \exp(\hat{\eta}_{i,j})$ si ottiene

$$\mathrm{Var}(\hat{P}_{i,j}^{GLM}) = \mathrm{Var}(\exp(\hat{\eta}_{i,j})) \cong \left(\frac{\partial \exp(\hat{\eta}_{i,j})}{\partial \hat{\eta}_{i,j}}\right)^2 Var(\hat{\eta}_{i,j}) = {\hat{P}_{i,j}^{GLM}}^2 Var(\hat{\eta}_{i,j})$$

Con logica analoga si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\hat{P}_{i,j}^{GLM}, \hat{P}_{m,n}^{GLM}) &= \mathrm{Cov}(\exp(\hat{\eta}_{i,j}), \exp(\hat{\eta}_{m,n})) \\
&\cong \mathrm{Cov}\left(\frac{\partial \exp(\hat{\eta}_{i,j})}{\partial \hat{\eta}_{i,j}}\left(\hat{\eta}_{i,j} - E(\hat{\eta}_{i,j})\right), \frac{\partial \exp(\hat{\eta}_{m,n})}{\partial \hat{\eta}_{m,n}}\left(\hat{\eta}_{m,n} - E(\hat{\eta}_{m,n})\right)\right) \\
&= \hat{P}_{i,j}^{GLM} \hat{P}_{m,n}^{GLM} \mathrm{Cov}(\hat{\eta}_{i,j}, \hat{\eta}_{m,n})
\end{aligned}$$

MSEP con GLM (4)

Poiché in generale la matrice di varianze covarianze del vettore dei predittori è

$$\mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\eta}}) = \mathrm{Var}\big(\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\big) = \boldsymbol{X}\mathrm{Var}\big(\widehat{\boldsymbol{\beta}}\big)\boldsymbol{X}'$$

dove la matrice di varianze covarianze coincide con la matrice di informazione di Fisher, ovvero

$$\mathrm{Var}\big(\widehat{\boldsymbol{\beta}}\big) = \big(\boldsymbol{X}'\widetilde{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{X}\big)^{-\mathbf{1}}$$

con $\widetilde{\boldsymbol{W}}$ matrice diagonale con elementi dati da $\frac{1}{\frac{\phi}{\omega}V\left(P_{i,j}\right)}\left(\frac{\partial \exp\left(\widehat{\eta}_{i,j}\right)}{\partial \widehat{\eta}_{i,j}}\right)^2$

in definitiva, sostituendo agli elementi incogniti le corrispondenti stime si ha

$$E\left[\widehat{MSEP}_{C_{i,T}|\Theta_T}\left(\sum_{i=1}^{T}\hat{C}_{i,T}^{GLM}\right)\right] = \sum_{i+j>T}\frac{\hat{\phi}}{\omega}V\big(\hat{P}_{i,j}\big) + \widehat{\boldsymbol{P}}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{Var}\big(\hat{\beta}\big)\boldsymbol{X}'\widehat{\boldsymbol{P}}\Big|_{i+j>T}$$

Nel caso di un modello Poisson sovradisperso con legame canonico

$V\big(\hat{P}_{i,j}\big) = \hat{P}_{i,j}$ e gli elementi di $\widetilde{\boldsymbol{W}}$ sono $\frac{\omega}{\hat{\phi}}\hat{P}_{i,j}^2$.

Una interessante generalizzazione: GLM e la distribuzione Tweedie

I pagamenti incrementali, in genere definiti da un processo Poisson composto, $\tilde{P}_{ij} = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{Z}_{ij}$, si dicono avere distribuzione di Tweedie che risulta essere appartenente alla famiglia esponenziale sovradispersa. Indicata con μ_{ij} la media del processo $\tilde{P}_{ij}$ e supponendo che $\mu_{ij} = \alpha_i \beta_j$, con α_i, β_j coefficienti che descrivono il contributo del anno di generazione *i* e dell'antidurata *j* la caratterizzazione del modello GLM con componente tweedie avviene definendo una funzione legame e una funzione varianza di tipo potenza del tipo

$$g(\mu_{ij}) = \mu_{ij}{}^{q}$$

$$V(\mu_{ij}) = \phi \mu_{ij}{}^{p}$$

- p=0 si ottiene la distribuzione Normale
- p=1 si ottiene la distribuzione Poisson
- 1<p<2 si ottiene una distribuzione composta
- p=2 si ottiene una distribuzione Gamma
- 2<p<3 si ottiene una distribuzione con supporto positivo
- p=3 si ottiene la distribuzione Inversa Gaussiana

Per q=0 si ottiene l'usuale legame logaritmico

⇨ Il parametri *p,q* possono essere oggetto di stima con la massima verosimiglianza